MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

TOMO XVIII

FASCICOLO PRIMO

DELLE

MEMORIE DI MATEMATICA

INDICE

DELLE COSE CONTENUTE NEL PRIMO FASCICOLO

DEL TOMO XVIII.

MEMORIE
DI
MATEMATICA

CONTINUAZIONE DELLA MEMORIA

DEL SIGNOR ABBATE COSSALI

INTITOLATA

INDAGINI PER ASSOGGETTARE A CALCOLO I MOVIMENTI DEL BAROMETRO EC. (*)

Ricevuta li 27. Gennajo 1815.

ARTICOLO IV.

Dipendenza dei movimenti del Barometro dalla Elettricità e primieramente dall' Artificiale

1° Sono quanto altre mai vistose e dilettevoli le esperienze su di un barometro, al quale comunicata venga la elettricità di una macchina. Isolato un barometro con un cordoncino di seta, se una persona parimente tra il barometro ed il conduttore della macchina isolata tocchi il conduttore elettrizzato con una mano, ed avvicini alla sommità del barometro l'indice dell'altra, splenderà tra la punta dell'indice, e la sommità del barometro una scintilla, e lo spazio voto della

(*) Vedasi il T.° XV. delle presenti Memorie parte Mat. pag. 1.

canna dalla superficie del mercurio balenerà tutto di una luce di colore tra violetto, e porporino, ma tanto a confronto della scintilla meno viva, quanto per più ampio spazio distesa, locchè richiede nel luogo la oscurità. Lo stesso spettacolo di luce nella vota superiore parte del barometro si ha, se dal conduttore della macchina tirato sia un filo di ferro, la cui estremità s' immerga nel mercurio del serbatojo del barometro. Ma più magnifico e sorprendente rendesi lo spettacolo, se si prenda una canna pollici 80 lunga, di 2 in 3 linee di vano, e nulla importa che sia uniforme. Si pieghi con un arco della corda di un piede a forma di porta, e delle due colonne se ne costruiscano due congiunti barometri a fiaschetta. S' isoli con un cordoncino di seta aggruppato al punto supremo dell' arco questa porta a barometriche colonne; nella fiaschetta di un de' barometri cada e nel mercurio s' immerga un filo di ferro partente dal conduttore elettrico, e nella fiaschetta dell' altro introducasi e nel mercurio s' insinui un altro filo di ferro, che sulla estremità sporgente al di fuori porti una piccola palla di metallo. Elettrizzato il conduttore, e con esso il primo barometro, la elettricità tragittando dalla sommità di una colonna mercuriale alla sommità dell'altra illuminerà l'arco, e cagionerà all'occhio una grata ammirazione, dandogli a vedere l'arco tutto insieme splendente per la somma velocità del tragitto, similmente che un arco ignito si vede movendo velocemente in giro una verga con bragia alla cima. L'invenzione del vaghissimo esperimento è di Cavendisch; ma conservò egli semplici, e ritte le gambe della porta facendone due barometri Torricelliani. Riescendo però incomodo e pericoloso il maneggio loro, io li cangiai in due barometri a fiaschetta nell'Accademia di fisiche esperienze sin dall'anno 1782 da me istituita, e per anni 4 continuata in mia patria.

2.° Ma questi vaghi spettacoli non sono quelli che formano quì il nostro interesse. Quello che importa sapere si è, se e di quanto la elettricità della macchina comunicata al

mercurio del barometro cangi l'altezza barometrica. Di questa ricerca occupati si sono Comus, Changeux, Marat, e dopo loro Landriani e Moscati.

3.° Comus si valse di due artificj per ottenere che le più piccole variazioni, ricevendo una sensibile grandezza, non isfuggissero all'occhio. L'artificio di Morland fu il primo; l'altro fu un ingegnoso artificio suo. E per dare alle sue esperienze maggiore autorità le fece innanzi al Sig. Duca di Chartres, ed ai Signori Delort, Rovelle, d'Arcet, e Rozier da esso deputati per verificare i fatti ed attestarli. Stimo bene di trascrivere quali nei volumetti XIII, e XIV degli Opuscoli interessanti raccolti e stampati in Milano si trovano in Italiano tradotte le descrizioni dello stesso Comus, e perchè da un canto sono succinte, e dall'altro ciò assicurerà la giustizia delle mie riflessioni. „ *Molti filosofi*, così ivi, *hanno provato ad elettrizzare il barometro, e non hanno in lui osservato niuna variazione durante la elettricità. Io ho ripetuto queste sperienze, ed ho trovato durante la elettricità una ascensione notabile nel mercurio. Siccome la variazione di due pollici, e mezzo (*) non forma nel barometro uno spazio assai considerabile, io ne ho fatto costruire uno secondo l'invenzione del Cav. Morland. Questo barometro è composto di due tubi, che formano un angolo di novantadue gradi e mezzo; uno è perpendicolare, e l'altro cui scorre il mercurio nelle sue variazioni è inclinato di due pollici, e mezzo all'orizzonte; la sua lunghezza per due pollici e mezzo di variazione è di tre piedi, il che per ogni linea ne dà quattordici. Io isolo questo barometro alla distanza di 6 piedi dal conduttore; lascio cadere nel vasetto pieno di mercurio un filo d'ottone attaccato al conduttore; dopo dodici giri il mercurio ascende di un quarto di linea, qualche volta di un terzo, ed anche di una metà. Si ferma in questa elevazione per dieci*

(*) Così si legge nella edizione Milanese, ma io stimerei che si dovesse piuttosto leggere due linee e mezzo.

o dodici ore e non ricade che lentissimamente . Io ho fatto questa esperienza più volte, e mi sono servito di uno stromento perfetto di paragone . Il risultato è stato sempre lo stesso .

Per assicurarmi se questa ascensione provenga dalla dilatazione del mercurio, o dalla pressione sopra di lui del fluido circostante, o dalla spezie di ondulazione che il fluido elettrico eccita sulla superficie del vasetto che contiene il mercurio, fo attualmente costruire una sorte di barometro che mi indicherà se vi ha accrescimento di volume. „ Ne segue la descrizione nel volumetto XIV. „ *Questo stromento serve di barometro, e di termometro insieme: eccone la costruzione. AB è un tubo ripiegato come ne' barometri ordinarj . Questo tubo è composto di varj altri di diversi diametri saldati gli uni sugli altri . AC è di linee* 1 $\frac{1}{2}$ *di diametro e di* 17 *pollici di lunghezza; CD è di* 5 *linee di diametro e di un piede di lunghezza; DE di* 10 *linee di diametro e* 5 *pollici di lunghezza; EF di* 5 *linee di diametro e di* 13 *pollici di lunghezza ripiegato in B; FG è di linee* 1 $\frac{1}{2}$ *di diametro e* 17 *pollici di lunghezza . Questo stromento contiene* 3 *libbre di mercurio, e però nella rarefazione e condensazione si hanno segni sensibili nei tubi AC, FG, il cui piccolo diametro dà una linea per grado secondo la divisione di Reaumur. Io ho elettrizzato questo stromento, ed ho osservato* $\frac{1}{4}$ *di linea di ascensione nell'alto, ed altrettanto nel basso, e qualche volta anche più . Per meglio giudicare dell'accrescimento io tengo lo stromento orizzontale, ed osservo la divisione che il mercurio segna nel tubo FG un po' sopra di F. Dopo di averlo elettrizzato lo stendo ugualmente, e vedo l' accrescimento nella totalità del mercurio per lo spazio maggiore che occupa . Io l' ho trovato sovente di una linea . Ho unito sulla medesima tavola un piccolo termometro HI il quale m' indica la rarefazione e condensazione , che può avvenire al mercurio durante l' operazione per cangiamento del caldo nell' atmosfera .* „

4. Sin quì Comus. Permesse mi sieno alcune riflessioni; e la 1[a] sia sulla descrizione del barometro inclinato secondo l' artificio di Morland. L'angolo di 92 gradi fra i due tubi, uno perpendicolare, l'altro inclinato, non bene concorda con la inclinazione al secondo attribuita rispetto all'orizzonte, che si esprime per il rapporto della sua verticale salita di pollici $2\frac{1}{2}$ alla sua lunghezza di 3 piedi. Questo rapporto viene ad essere quello di 5 : 72, cioè, dinotando per ϕ l'angolo di essa inclinazione, $\text{sen.}\phi = \frac{5}{72}$, $\text{log.sen.}\phi = \text{log.}5 - \text{log.}72 =$ $8,8416375$, che è il logaritmo del seno di $3^\circ.58'.21''$ prossimamente; onde aggiungendo 90° si trova per l'angolo fra i due tubi perpendicolare ed inclinato la grandezza di $93^\circ.58'.21''$, non già di 92° soltanto. Un po' peggio si è se in luogo dell'esatto rapporto di 5 : 72 tra la verticale salita, e la lunghezza del tubo inclinato si prenda a comodo de' numeri il rapporto di 1 : 14; poichè fatto $\text{sen.}\phi = \frac{1}{14}$, risulta $\text{log.sen.}\phi$ $= 8,8538720$, e quindi $\phi = 4^\circ.5'.46''$ prossimamente, e perciò l' angolo fra i due tubi $94^\circ.5'.46''$; la inclinazione di 92° fra i due tubi, e conseguentemente di 2° gradi dell' obbliquo con l' orizzonte porterebbe meno della ragione di 1 : 28 tra la verticale sua salita e la sua lunghezza, poichè $\text{log.sen.}2^\circ$ $= 8,5428192$, e quindi $\text{sen.}2^\circ = 0,034899 < \frac{1}{28,65}$, e molto più $< \frac{1}{28}$. Secondo pertanto questa ragione minore di 1:28 in luogo di quella di 1 : 14, gli aumenti barometrici di $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ di linea si ridurrebbero a meno di $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$. Ma a dir vero è più probabile, che Comus abbia misurate la lunghezza del tubo inclinato e la sua verticale salita sopra l' orizzontale tirata dall'angolo fra i due tubi, ed abbia commesso errore nel computo dell' angolo di esso tubo inclinato con la retta orizzontale, di quello che a rovescio; ond' è più ragionevole l' ammettere il rapporto prossimo di 1 : 14, e con esso gli ascendimenti barometrici di $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ di linea, che il

rapporto minore di 1 : 28, ed i corrispondenti barometrici ascendimenti minori della metà dei detti. Anche sulle esperienze fatte col secondo artificio cade il bisogno di qualche riflessione. Posto $\frac{1}{4}$ di ascensione del mercurio nel sottile tubo CA, ed altrettanto nel sottile FG, manifestasi bensì $\frac{1}{2}$ di linea di dilatazione nella massa totale del mercurio ma niun aumento di altezza barometrica, rimanendo la stessa la distanza dalla superficie del mercurio nel tubo FG alla superficie sua nel tubo CA. Eppure dilatato il mercurio, e renduto specificamente più leggiero, tale distanza costituente propriamente l'altezza barometrica doveva aumentarsi per tenersi equilibrata con la pressione atmosferica, a meno che non si voglia, che per lo elettrizzamento dell'aria intorno al tubo CG, essa pressione di tanto appunto diminuita si fosse da importare un diminuimento di altezza barometrica uguale all'accrescimento corrispondente alla dilatazione, ed al minoramento della specifica gravità del mercurio. Ma su qual fondamento supporre che lo elettrizzamento della colonna aerea, massime nei ristretti limiti ai quali lo può estendere la macchina, la renda meno premente? Potrebbesi piuttosto dire che per la proporzione dei tubi componenti il barometro, avvenendo nei sottili tubi AC FG una somma di dilatazioni = ad 1 linea per ogni grado di calore della scala di Reaumur, lo elettrizzamento che produsse la somma di $\frac{1}{2}$ di linea si deve stimare equivalente ad $\frac{1}{2}$ grado di calore della scala di Reaumur. Laonde posto anche che 80 gradi di calore, quanti ve ne sono dal ghiaccio fondentesi all'acqua bollente, producessero in una colonna barometrica di 27 pollici l'accrescimento di linee 6 come in qualche luogo contro altri luoghi suoi, e contro gli esperimenti di altri pone il De-Luc, l'aumento dell'altezza barometrica per il detto elettrizzamento avrebbe dovuto essere non più che di $\frac{6}{2.\ 80}$ cioè di $\frac{3}{80}$, prossimamente di $\frac{1}{27}$ di linea, il quale piccolo aumento può essersi furato alle pupille di Comus. Ma non è poi il suo parlare di

tal' coerenza che appaghi. Imperciocchè dopo aver detto di aver osservato $\frac{1}{4}$ di linea di ascensione nell'alto, ed altrettanto nel basso, e qualche volta di più, lo che sommando importa nel mercurio la dilatazione di $\frac{1}{2}$ di linea, e qualche volta di più, dice che misurando, steso orizzontalmente il barometro, tutta insieme da una parte la dilatazione del mercurio, l'ha trovata sovente di 1 linea. Se fu qualche volta soltanto più di $\frac{1}{2}$, come fu sovente una linea? Supposto non pertanto ciò vero, l'aumento dell'altezza barometrica in seguito del calcolo testè instituito avrebbe dovuto essere di $\frac{2}{27}$ di linea, e più difficilmente togliersi all'occhio acuto e diligente di uno esperimentatore; e la forza della elettricità quanto al dilatare il mercurio sarebbe stata equivalente ad un grado di calore della scala di Reaumur. Siamo ora in grado di confrontare i risultati da Comus ottenuti per mezzo del secondo metodo di un barometro a sottili tubi sopra grossi saldati, con i risultati ottenuti per mezzo del metodo primo di un barometro inclinato, supponendo però che gli ascendimenti del mercurio dal barometro inclinato dedotti di $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ di linea sieno stati i veri accrescimenti dell'altezza barometrica, cioè, che Comus dibattuti ne abbia gli inalzamenti del mercurio nel vase del barometro, o che questo fosse di tal ampiezza per cui essi divenissero sì piccoli da non tenerne conto. Avendo calcolato che con tutti i supposti più vantaggiosi il massimo accrescimento di altezza barometrica risultante dagli esperimenti del secondo metodo sarebbe stato di $\frac{2}{27}$ di linea, se questo si confronti con il massimo di $\frac{1}{2}$ di linea col primo metodo conseguito si avrà il rapporto di $\frac{2}{27} : \frac{1}{2}$, o sia di 4: 27, si può dire di 1 : 7; e nello stesso rapporto la forza della elettricità, quanto al diminuire col dilatamento la gravità specifica del mercurio, nel massimo elettrizzamento tra gli esperimenti del secondo metodo al massimo elettrizzamento

tra quelli del primo; onde essendosi ricavata la forza della elettricità in quel massimo equivalente alla forza di un grado di calore degli 80 della scala di Reaumur, sarebbe stata la forza della elettricità in questo massimo equivalente a gradi 7.

5.° Maggiori effetti narra di avere osservato Changeux, sebbene osservasse su di una canna all' ordinario retta ed uniforme. Attesta egli, che allora quando il mercurio è caricato, quanto può essere, di materia elettrica, si alza alcune volte da $\frac{1}{2}$ ad 1, ed anche a due linee; che in molti casi però sembra, che la elettricità non agisca punto sopra di esso. *Examen des effets de l'electricité soit naturelle, soit artificielle sur le Baromètre. Journ. de Physique an.* 1778. *Tom. I. pag.* 339. Prendendo il massimo inalzamento di due linee per il vero aumento della colonna barometrica con supporre, che detratto ne abbia l' inalzamento nel vase, o che per l' ampiezza non fosse da porlo a computo, e calcolando sul dato del De-Luc di linee 6 di aumento in una colonna barometrica di pollici 27 per gradi 80 di calore, e supponendo che l' altezza naturale del barometro negli esperimenti di Changeux che gli produssero linee 2 di aumento fosse di pollici 27 appunto, troverebbesi che la forza dell' elettrizzamento, quanto al dilatare il mercurio e diminuirne la gravità specifica, fu in quelli esperimenti equivalente a gradi $\frac{80,2}{6}=27$ prossimamente di calore. Ritenuti gli stessi supposti, e pigliando per base del calcolo, in luogo di linee 6, la quantità di linee 5, 273 al fine dell'articolo II. ricavata per media misura dell' aumento in una colonna barometrica di pollici 27 prodotto da gradi 80 di calore, risulterebbe il massimo elettrizzamento di Changeux equivalente a gradi di calore $\frac{80,2}{5.273}$ $=\frac{160000}{5273}=30,34$.

6.° Marat sebbene affermi di aver caricato all' eccesso di elettricità la tazza, in cui la canna barometrica era immersa, non ebbe però mai la sorte di mirarvi elevazioni del mercurio

sì grandi, come il Fisico inglese Changeux. Racconta egli solamente, che il mercurio eccessivamente elettrizzato prova alcune ondulazioni, e bentosto appresso si fissa ad $\frac{1}{4}$ di linea più alto che esso non era avanti l' esperienza; e che se facciasi detonare con la scarica la tazza, il mercurio torna ad ondeggiare, ma quietandosi non sembra punto discendere. Nota poi che tutto ciò non ha luogo che in un tubo purgato di aria; poichè se non è tale, la superficie del mercurio resta tranquilla. Confuta per fine l' opinione sino allora, a suo dire, comune di attribuire l' effetto alla elasticità del fluido elettrico, pretendendo di dimostrare con varie esperienze, che questo fluido non è per nulla elastico, e sostenendo che altra non n' è la cagione, che la quantità del fluido elettrico penetrata nel tubo, tanto più grande, quanto il voto al disopra del mercurio è più considerabile. Senza distraermi ad esaminare le prove di Marat contro la elasticità del fluido elettrico, è cosa ben maravigliosa, che scaricato il mercurio di elettricità non siasi all' occhio dell' esperimentatore presentata nella colonna mercuriale veruna discesa. Questa poteva al più ritardare alcun poco, ma doveva succedere, e forse non la vide il Marat per avere impazientemente abbandonato il barometro. Se non che doveva pur di subito dopo la scarica mostrarsi, nella sua opinione, che la elevazione della colonna mercuriale d'altronde non nasca nè prenda misura, che dalla massa del fluido elettrico penetrante nell' atto della carica a mescolarsi colla massa del mercurio; poichè detratta al contrario con la scarica la massa stessa del fluido elettrico dovrebbe rimaner tolta la elevazione del mercurio dianzi con la carica prodotta. Al più al più si potrebbe dire, che non si toglie al momento tutta la elevazione per non ritirarsi con la scarica tutta la quantità di fluido elettrico con la carica entro spinta; ma anche questo difetto di scarica in confronto della carica malamente componesi con l'idea di una mera meccanica aggiunta di massa a massa, e sottrazione dell' una dall' altra, senza che nella

carica indotta venga alcuna nuova affezione nelle più menome particelle del mercurio, della quale esse divengano un po' tenaci, a grado di non lasciarsene tutto ad un tratto in una sola scarica spogliare. Non è così, se concepiscasi nascere tra le più piccole particelle del mercurio e quelle del fluido elettrico una combinazione, per la quale le così composte particelle si respingano, e la composta massa si dilati. Non apparisce poi ragione, per cui la elevazione della mercuriale colonna allora soltanto succeda quando il tubo fu purgato di aria, e manchi quando non lo fu. Ciò è quanto dire, che quando sopra la colonna mercuriale il voto è imperfetto a cagione di un po' di aria per esso sparsa, o il fluido elettrico non vale a penetrare nella massa del mercurio, o penetrandovi non ne riempie che i pori, e vi è sì premuto e condensato a non produrre nella colonna mercuriale alcun allungamento, od all' incontro la tragitta sì liberamente e rapidamente, slanciandosi al di sopra di essa, che non permette all' occhio di accorgersi nella colonna mercuriale di movimento veruno. Ora si rifletta che il non essere stato il tubo purgato d'aria col fuoco importa due cose: l'essere il mercurio della colonna in tutta la lunghezza infetto d'aria, ed il trovarsi nella suprema parte del tubo diffusa e rarefatta quella quantità di aria, che dalla massa stessa del mercurio valse a svilupparsi. La vera ed intera colonna barometrica in un tubo di questa fatta non è la sola colonna mercuriale, ma l' aggregato di questa e della superiore colonnetta di aria rarefatta premente sì tanto meno, quanto minore è la sua densità, ma pur tanto quanto è duopo a supplire il difetto della colonna mercuriale infetta d'aria. Così in un dato stato di atmosfera la pressione composta delle due pressioni è la stessa stessissima che quella, che eserciterebbe la colonna mercuriale purgata d'aria, e con voto perfetto al di sopra. Ciò essendo, qual ragione, che l'elettrico fluido non possa nella mercuriale colonna penetrare? o penetrandovi non ne riempia che i pori, rimanendovi talmente premuto e

condensato a non produrre nella mercuriale colonna medesima veruu allungamento? O come per l'opposto infingersi tale libertà di tragitto, e rapidità di slancio attraverso d'una lunga colonna di mercurio infetto d'aria inceppata, ed in uno spazio d'aria sparso, a non cagionare nella superficie della colonna medesima movimento alcuno nè in quantità, nè in durata all'attento sguardo dello esperimentatore sensibile?

7.° Landriani e Moscati celebri fisici italiani hanno preso in vista un confronto dagli altri ommesso, qual è quello degli effetti sul barometro operati dalla elettricità vitrea e dalla resinosa. Hanno eglino congiuntamente veduto, che elettrizzato il barometro con elettricità vitrea, riferisco le loro stesse parole, sempre e costantemente s'inalza colle seguenti circostanze: cioè s'inalza sempre assai più nella prima volta che in tutte le altre consecutive, così che, se quando comincia l'esperimento si è ottenuto l'aumento di $\frac{40}{100}$ di linea, le altre volte consecutive non arriva che a $\frac{25}{100}$. Lasciato in quiete il barometro torna a dare, elettrizzandolo, la prima elevazione più grande. Quando si cava la scintilla si abbassa ad un tratto il mercurio per quasi tutto lo spazio che si era innalzato; non si ricompone però all'altezza di prima se non dopo alcuni minuti. Nell'atto che il barometro è elettrizzato, sortono dalla colonna mercuriale delle visibili scintillette state già osservate da altri Fisici; la colonna mercuriale sensibilmente oscilla, non per tremore nè scosse del barometro, ma per mero effetto di elettricità. Elettrizzato un barometro con elettricità resinosa, per la prima volta alquanto si alza, ma meno che colla elettricità vitrea; oscilla e dà qualche scintilla: elettrizzato in seguito altre volte consecutive non si move visibilmente, o almeno pochissimo. Toltagli la elettricità, pare che si rialzi, e che si renda più convesso e non ritorna alla primitiva elevazione, se non dopo circa un quarto d'ora. Confrontando queste sociali osservazioni di Landriani e Moscati, tanto più autorevoli quanto

che munite delle testimonianze di due Fisici insigni, con quelle di Marat, apparisce incontanente non verificarsi assolutamente rispetto alla elettricità vitrea il mirabil fenomeno, che tolta con la scarica al barometro la elettricità, il mercurio non si abbassi. Piuttosto sembrano approssimarsi le narrazioni rispetto alla elettricità resinosa, poichè sebbene quel *rialzarsi* dai due Fisici italiani espresso additi l'osservazione di un antecedente abbassamento nell'atto della scarica, potrebbesi dire, che questo abbassamento fu da Marat confuso nella ondulazione del mercurio all' atto stesso, e che in fine le osservazioni vanno a coincidere in una altezza del mercurio non aspettata. Pure vi ha una diversità da non passarsi senza considerazione nelle misure, dicendo Marat, che allorchè il mercurio dopo l'ondulazione *il est fixé, il ne paroit pas descendre;* ed i due socj italiani, ,, che pare, che si rialzi ,,. Il non apparire disceso da quella elevazione che la carica gli indusse, significa o niuno, od invisibile discendimento; ed il parere rialzato da quell'abbassamento per la scarica aspettato, e nel caso della elettricità vitrea osservato, significa o niuno o piccolissimo rialzamento. Potrebbe anche questo piccolissimo rialzamento essere stato il principio di una ultima oscillazione impedita dal compiersi, dall' attrazione del tubo. Ed insegnano gli stessi due illustri Fisici al § VII delle esperienze loro sociali, che dopo avere il mercurio lungo il tubo oscillato, si tiene per un po' di tempo più alto del dovere. Ciò nulladimeno, se costante fu nella colonna mercuriale la diversità degli effetti per la scarica della elettricità vitrea, e per la scarica della resinosa, e se pari furono le altre circostanze tutte, come estimar si deve, sebben eglino espressamente nol dicano, non si potrà non riconoscere tra la elettricità vitrea e la resinosa, quanto alla loro azione sul barometro, una differenza. E questa vien confermata dalla differenza dell' alzamento del mercurio nelle cariche, supponendo però, che le cariche siano state con gli elettrometri esaminate e recate allo stesso vigore, condizione che

non lice dubitare essere stata dai due preclari esperimentatori avuta in vista. Parimenti è giusto credere, che nel determinar le elevazioni della colonna mercuriale di $\frac{40}{100}$ di linea al primo caricarla di elettricità vitrea, e di $\frac{25}{100}$ nelle cariche susseguenti, e così pure nelle minori corrispondenti elevazioni di essa nella prima, e nelle successive cariche di elettricità resinosa siasi sempre avuto riguardo alle elevazioni nel pozzetto, meno che l'ampiezza di questo togliesse la necessità del diffalco. Quanto alla maggioranza della elevazione della stessa mercuriale colonna alla prima carica, che alle posteriori, se ebbesi l'avvertenza di renderle tutte egualmente forti, e d'interporre tra loro l'intervallo necessario alla colonna per ricomporsi alla primitiva naturale altezza, io non saprei donde ripeterla, se non fosse dal vigore di uno slancio del fluido elettrico alla prima carica nel voto barometrico, e dalla elasticità di un residuo dopo la prima scarica opponentesi all' interezza dell' effetto delle cariche successisive. E poichè nel caso delle cariche ad elettricità resinosa la differenza fu assai più grande, di modo che nelle cariche consecutive, dicesi, che non si mosse visibilmente, od almeno pochissimo, bisognerebbe inferirne, che nel caso della elettricità resinosa quel residuo dopo la prima scarica fosse assai più grande, e tale a distruggere quasi l'effetto delle cariche susseguenti. Ma come poi conciliar ciò con quel qualunque rialzamento, che parve di vedere fatta la scarica?

8.° Risulta da tutti i riflessi, esami e calcoli, che ho esposti, che la elettricità artificiale ha certamente qualche azione sul barometro, ed induce qualche aumento nella barometrica altezza; ma che la quantità di questo aumento non è ben definita, e che gli effetti delle cariche e delle scariche, sì ad elettricità vitrea che a resinosa, e la diversità nei due casi involgono de' misterj, e che in conseguenza la materia richiede nuovi esami più delicati, e con tutte le avvertenze, che qua e là io ho accennate e supposte. Intanto

in virtù di tali supposte avvertenze porremo, che l' aumento dell' altezza barometrica per lo elettrizzamento si estenda, comprendendo i risultati tutti delle esperienze dei diversi Fisici, da $\frac{1}{27}$ di linea a 2 linee. In tutte le sperienze si è elettrizzato il barometro, rendendolo con un filo metallico comunicante con la macchina. Ma una macchina forte diffonde per una gran camera, per una sala tale elettrizzamento, che anche alle maggiori distanze si veggono divergere i pendoletti. Perciò sarebbe bene esperimentare eziandio qual inalzamento nel barometro nascesse in una stanza nella quale agisse una potente macchina da esso lontana e separata. E sino a che non siamo di tali esperimenti forniti, stimerei non essere della fisica accuratezza il tenere in una camera medesima una vigorosa macchina elettrica sovente, e senza differenza di tempo posta in azione, ed un barometro di osservazione su certi punti dilicati e sottili, qual è la questione del flusso e riflusso dall'attrazione lunare nell' atmosfera prodotto, e per poco valevoli avrei quelle che con tale avvertenza non fossero state instituite.

9.° Recherà meraviglia, che l'aumento della colonna barometrica per l' elettrizzamento sia stato ritrovato estendersi al più a linee 2, essendo stato per altra parte dimostrato dal Beccaria (Elettricismo artificiale § 597.), che tradotta per una o più gocciole di mercurio chiuse tra vetri una scarica elettrica, questa nel suo tragitto ne fonde sulla faccia loro un velo, e lo scioglie in alito, parte del quale, badando attentamente, si vede elevarsi in aria sotto la sembianza di verghetta di fumo, parte si trova improntata sul vetro. Qual paragone di un dilatamento sì tenue in una massa di mercurio sì grande, quanta ne contiene un barometro con lo scioglimento in alito? Ma appunto quanto è maggiore la massa del mercurio componente un barometro di una o più goccerelle in linea retta disposte, e quanto è minore la forza di un flusso di fluido elettrico per un filo metallico dal conduttore

della forza di una scarica di un gran quadro Frankliniano, tanto in un barometro esser deve minore l'effetto.

10.° Spero, che non riuscirà ai Fisici discaro il confronto, che qua e là ho introdotto della forza della elettricità, e del calore quanto al dilatare il mercurio, diminuirne la specifica gravità, ed aumentare la barometrica altezza. L' aumento di questa estendendosi da $\frac{1}{27}$ di linea a linee 2, la equivalenza della elettricità rapportata al calore si estenderà da $\frac{1}{2}$ grado a gradi sino 27, computando sulla base di linee 6 di aumento per gradi 80 di calore; e da $\frac{56}{100}$ di grado a gradi ben 30, 34, calcolando sulla base di linee 5, 273 di aumento per gli stessi gradi 80 di calore sulla scala di Reaumur, o su quella del De-Luc, non essendo quì attendibile la piccola differenza loro.

Dipendenza dei movimenti del Barometro dalla Elettricità naturale.

Bisogna intendere in senso proprio il termine di dipendenza. Si osserva soventi volte che allo scoppio di un gagliardo fulmine il mercurio sensibilmente oscilla nel tubo barometrico. Ma questa oscillazione è ella una vera influenza della elettricità fulminea comunicata al barometro, o pure l'effetto solo dell' impeto o dell' urto esercitato dal torrente fulmineo contro l'aria e dell'aria contro la superficie del mercurio ad essa esposta nel serbatojo? Possono aver luogo l'una, e l'altra insieme queste cagioni, queste maniere di agire della elettricità atmosferica sul barometro, e può altresì aver luogo la seconda solo senza la prima, sì come reciprocamente la prima senza la seconda. Ma vi ha tra l'una e l'altra una grande differenza: la seconda non si potrebbe dire che impropriamente influenza dell'elettricità atmosferica sul barometro, nè si può riguardare che come un accidente estraneo meccanico

risultante dalla opposizione dell'aria allo slancio della fulminea elettricità medesima. Mi pare che si potrà giudicare che l'oscillazione del mercurio nel barometro non sia stata che tale accidente nato dalla spinta e compressione dell'aria quando cessato il breve oscillamento non resti alcuna elevazione del mercurio sopra la primiera altezza. Conviene ancora distinguere influenza indiretta e rimota da influenza diretta ed immediata. Non si ha dubbio che la elettricità abbia una massima parte nel variare lo stato dell' atmosfera e per tal via sarà causa di variazione nel barometro; ma questa è una influenza indiretta e rimota. Si tratta e si cerca se la elettricità atmosferica possa immediatamente e direttamente, col comunicarsi al mercurio di un barometro, esercitare su di esso una sensibile influenza, produrre una apprezzabile variazione di altezza. Scrive Changeux, che l'atmosfera, anche allora che è più carica di elettricità, è ben lontana dal comunicarne al mercurio tanta, quanta si può in esso accumularne coll' ajuto della macchina, che *vi ha in ciò una differenza prodigiosa tra gli effetti della elettricità artificiale e della elettricità naturale:* onde ne tira per conseguenza, che se quella non vale a far montare il barometro che molto poco, di due linee al più, e talvolta niente, l' ascesa del barometro per la elettricità naturale sarà ben più insensibile e tale da contarsi per nulla, luog. cit.

Landriani afferma non essergli mai accaduto di osservare alcuna differenza durante un furioso temporale fra due barometri uno de' quali era isolato.

Ma il P. Cotte assicura, che tutte le volte che egli ha stabilito una comunicazione tra il suo grande conduttore d'elettricità naturale ed il suo barometro, vi ha sempre veduto il mercurio montare un poco. E più particolarmente narra che il giorno 19 Maggio 1781, durante un violento temporale il mercurio si mostrò in una continua agitazione e di tratto in tratto si slanciava come se fosse stato in bollimento sul fuoco, ciascuno slancio era preceduto da uno scoppiettio, ed

egli vedeva sortire dalla superficie del mercurio delle scintille, massimamente all' istante del lampo, e termina con notare, che in generale in simili casi il mercurio monta subitamente di $\frac{2}{12}$ di linea e vi si sostiene quasi per due ore appresso, e la superficie di lui è più convessa dell' ordinario.

Sembrerà che la prodigiosa maggioranza degli effetti della artificiale sopra gli effetti della naturale elettricità asserita da Changeux sul barometro sia una esagerazione da non ammettersi, anzi una assurdità da rigettarsi sdegnosamente: e come! la natura più debole dell' arte? un fulmineo torrente che si diriga, che si carichi sul barometro impotente ad operare gli effetti prodottivi da un rivo elettrico condottovi dalla macchina? E non è anzi a temersi che la fulminea carica scioglierebbe in alito il mercurio e scaglierebbe in pezzi la canna? Sembrerà ancora che la conseguenza di Changeux, e le osservazioni di Landriani sieno in contraddizione con le sperienze di Cottes. Pure e la potenza della natura senza misura eccedente quella dell' arte si salva, e la conseguenza di Changeux, le osservazioni di Landriani, le esperienze di Cottes si conciliano insieme, discernendo tre stati della elettricità atmosferica, tre azioni corrispondenti. Considero in 1.° luogo l' azione che l' aria elettrizzata esercita sul barometro per se medesima, essendo la elettricità nell'atmosfera od almeno negli strati al barometro prossimi in uno stato di disseminazione. Considero in 2.° luogo l'azione della elettricità atmosferica attratta e raccolta placidamente sul barometro da un conduttore. Considero finalmente in 3.° luogo l' azione d'un denso ammassamento di elettricità d' un torrente fulmineo, che vincendo la resistenza dell' aria, e squarciandola, sul barometro venga per seguire suo sentiero a scagliarsi. Non vi ha dubbio che questo fulmineo torrente sarà possente a produrre sul barometro i più grandi effetti ed anche rovinosi. Minori ma pur sensibili devono essere, e le sperienze di Cottes dimostrano che sono, gli effetti della

elettricità per il conduttore placidamente via via raccolta dalle parti dell' atmosfera a lui vicine; gli effetti della elettricità disseminata dovendo essere ancora minori non è maraviglia che sieno sovente insensibili sul barometro, conforme alle osservazioni del Landriani. Non ardirei però affermare, che lo debbano essere sempre, e che anche la elettricità per l' atmosfera sparsa e divisa non possa giugnere a tal grado di forza, da rendersi sul barometro sensibile e produrvi una variazione d'altezza all'occhio cospicua. Degli effetti della elettricità atmosferica disseminata, in confronto d' un torrente di elettricità artificiale dalla macchina per il conduttore portato al barometro, si deve intendere la prodigiosa maggioranza da Changeux celebrata della elettricità artificiale sopra la naturale rapporto all'influenza sul barometro. Ma veramente il confronto non è giusto, e per esserlo bisognerà che il barometro sia riguardo alle due elettricità nelle medesime circostanze, o riguardo ad ambe godente il beneficio del conduttore che ve le accumuli, o riguardo ad ambe di tal beneficio privo, e semplicemente isolato nel mezzo dell' aria elettrizzata, ed esposto unicamente all' azione dell'elettricità per essa sparsa.

Vedi la tavola della Memoria Bordoni a cui si è unita la figura citata nella presente Memoria.

SOPRA LA FORZA

CON LA QUALE L'ACQUA DI UNA GRAN VASCA PRISMATICA SGORGANDO DA UNA PICCOLA LUCE SPINGE INNANZI LA COLONNA ACQUEA CONTENUTA IN UNA CANNA CILINDRICA, E ORIZZONTALE CONGIUNTA ALLA LUCE MEDESIMA

MEMORIA

Del Sig. Ab. Giuseppe Avanzini

Ricevuta il giorno 2. Febbrajo 1815.

§. 1°.

Oggetto della Memoria

ABDH (Fig. 1) è una gran vasca d'acqua mantenuta allo stesso livello AB; *cdef* è una lunga e sottile canna cilindrica unita ad un corto tubo conico CD*dc*, che ne seconda la vena; la bocca *ef* è chiusa così che l' acqua della vasca e della canna è in perfetta quiete. Se tutto ad un tratto si apre la bocca *ef*, l' acqua incomincierà a sgorgare e a correre nella canna con moto accelerato.

In un mio scritto (*a*) letto all' Accademia di Padova nell'Adunanza degli 11 Marzo 1813, e pubblicato con le stampe nell'anno stesso, io credo di avere evidentemente dimostrato, che (nella ipotesi assunta in simili casi da tutti gli Idraulici, che sopra la forza, qualunque siasi, con la quale l'acqua della vasca spingerà innanzi l'acqua della canna alla fine del tempo t, computato dall' istante in cui si è aperta

(*a*) Supplemento alla Memoria intitolata: *Della vera legge dell'urto de' fluidi contro ostacoli mobili. Padova nella Stamperia del Seminario* 1813.

la bocca ef, non abbia alcuna influenza l' aumento della velocità, che nel successivo tempetto dt acquisterà l' acqua della canna) quella forza dovrà stimarsi con la formola $a\delta\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$, intendendo per a l'area della luce, per δ la densità dell' acqua, per c la velocità con la quale l'acqua della vasca sgorgherebbe se non ci fosse la canna; e per v la velocità dell' acqua della canna alla fine del tempo t.

L' oggetto della presente Memoria è di esaminare: se quell' aumento di velocità possa, o nò alterare la forza medesima, così che quando il moto dell' acqua della canna fosse accelerato, non potesse stimarsi più con la formola $a\delta\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$.

§. 2.°

Osservazioni preliminari

1.ª L' acqua della vasca e della canna formando una massa continua di fluido, la velocità con la quale l' acqua della vasca sgorgherà da cd (Fig. 1) sarà perfettamente eguale alla velocità dell' acqua della canna.

2.ª L' acqua non potrà sgorgare da cd con la velocità v dell' acqua della canna senza che si muova, scendendo, l'acqua della vasca.

3.ª Essendo grandissima l' ampiezza della vasca (§. 1.), ed assai piccola la luce cd, potrà supporsi zero la velocità dell' acqua per la vasca.

4.ª Non potendo l' acqua passare da una velocità zero, o piccolissima ad una velocità finita se non per gradi, dovrà sopra la luce cd formarsi un gorgo, per esempio $ahDdcCb$, il quale, restringendo le sezioni, faccia aumentare la velocità dallo zero in ab fino a v in cd.

5.ª Supposta QPr la linea che percorre pel gorgo la molecola Q; u la velocità in P della molecola P; $QP = l$; $Pp = dl$; la verticale $PZ = y$; $pz = y + dy$; la molecola P avrà

due velocità, l' una effettiva ed eguale alla velocità u, colla quale la molecola stessa discende per Pp, l' altra virtuale, ossia di tendenza per la medesima direzione Pp della velocità effettiva u.

Quanto alla velocità effettiva è manifesto. Rispetto alla velocità virtuale io rifletto 1.° che risolvendo la gravità assoluta g della molecola P nelle due agenti, la prima in direzione perpendicolare, l'altra parallela alla Pp, si trova la forza parallela eguale a $\frac{gdy}{dl}$. 2.° Che se la molecola P fosse libera, dopo il tempetto dt, cioè quando essa molecola è passata da P a p, avrebbe la velocità u che aveva in P, più la velocità $\frac{gdy}{dl}dt$. 3.° Che per non esser libera ha in p la velocità $u+du$ (osser.e 4.a); 4.° Che la velocità $u+\frac{gdy}{dl}dt$ potrà supporsi composta di $u+du$, che la molecola P ha alla fine del tempetto dt; e di un'altra, per esempio, W; 5.° Che la W dovrà estinguersi, altrimenti alla fine del tempetto dt la molecola P in luogo della velocità $u+du$, ne avrebbe un'altra maggiore, che è contro l'ipotesi; 6.° che essendo $u+\frac{gdy}{dl}dt=u+du+W$, sarà W, (cioè la velocità che si estingue) eguale ad $u+\frac{gdy}{dl}dt-u-du=\frac{gdy}{dl}dt-du$; 7.° Che per la stessa ragione in ciascun' altra molecola della QPr si estinguerà $\frac{gdy}{dl}dt-du$; che è quanto dire, che in tutte le molecole di QPr ci sarà una velocità $\frac{gdy}{dl}dt-du$ di sola tendenza.

Resta ora a vedere che questa velocità $\frac{gdy}{dl}dt-du$ sarà all' ingiù, siccome lo è la velocità u.

È manifesto che a tal uopo basterà dimostrare, che $\frac{gdy}{dl}dt$ è maggiore di du $\frac{gdy}{dl}dt$, è eguale a $\frac{gdy}{u}$, essendo $dt=\frac{dl}{u}$. Ora io dico che $\frac{gdy}{dl}dt$ è maggiore di du, perchè $\frac{gdy}{u}$ è maggiore di

du, ossia perchè gdy è maggiore di udu. Chiamata W la velocità, che acquisterebbe un grave cadendo dall'altezza y, sarà $gdy = WdW$; ora WdW è maggiore di udu, perchè la velocità u in Q è minore della velocità W dovuta all'altezza y. Che in Q la velocità u sia minore della velocità dovuta all' altezza Qk, è certo, imperciocchè in Q la velocità u è zero, o piccolissima (osserv.[e] 4.[a]). Similmente nel punto r la velocità u è minore della velocità dovuta all' altezza del livello AB sopra r; per la ragione che in r la velocità u è eguale alla velocità dell' acqua della canna (osserv.[e] 1.[a]), e la velocità dell' acqua della canna è minore della velocità dovuta all' altezza del livello AB sopra cd, poichè quella sarebbe c (§. 1.), e la velocità dell' acqua nella canna è v, che si suppone minore di c. Ora se in Q ed in r, udu è minore di WdW, ossia di gdy, è evidente, che dovrà esserlo tanto più in ciascun altro punto P.

§. 3.°

In che consista la forza motrice dell' acqua nella canna

È palese 1.° che per la velocità effettiva u della molecola P, e di ciascun' altra del filo QPr non potrà nascere forza alcuna sopra la molecola anteriore, poichè anche la molecola contigua anteriore discende con velocità u eguale a quella, con la quale è inseguita dalla molecola posteriore. 2.° Che per la velocità virtuale $\frac{gdy}{dl}dt - du$ della molecola P, e di ciascun' altra del filo QPr dovrà nascere sopra la particella contigua anteriore una pressione, e che questa pressione sarà eguale alla forza capace di produrre la suddetta velocità virtuale, cioè eguale a $\frac{gdy}{dl} - \frac{du}{dt}$. Da ciò rendesi manifesto, che la forza con la quale l' acqua della vasca spingerà innanzi l' acqua della canna alla fine del tempo t, consisterà

nella pressione che, per cagione delle forze $\frac{gdy}{dl} - \frac{du}{dt}$ di tutte le molecole del gorgo, l' acqua della vasca farà in *cd* sopra l' acqua della canna.

§. 4.°

Formola della forza motrice quando il moto dell' acqua della canna è uniforme.

Consistendo la forza motrice dell'acqua della canna nella pressione in *cd* cagionata dalla somma delle pressioni $\frac{gdy}{dl} - \frac{du}{dt}$ di tutte le molecole del gorgo (§. precedente), per trovare l'espressione della forza medesima, basterà trovar l'espressione della somma delle suddette pressioni.

A tal uopo si osserverà che, essendo $\frac{gdy}{dl} - \frac{du}{dt}$ la pressione della molecola P, sarà $\left(\frac{gdy}{dl} - \frac{du}{dt}\right) dl = gdy - \frac{du}{dt} dl = gdy - udu$ $\left(\text{essendo } dt = \frac{dl}{u}\right)$ la pressione in p delle molecole di $Pp = dl$; e $C^k + \int (gdy - udu)$ la pressione in P delle molecole di tutta la $QP = l$.

Per farne la integrazione convien riflettere, che comunque la u dipenda, e dalla posizione della molecola P, cioè dalla y, e dal tempo t, per la ragione che nel principio del tempo t, in cui tutta l' acqua della vasca e della canna è in quiete (§. 1.°), anche la velocità u della molecola P deve esser zero, e crescere aumentandosi il tempo, e la y tuttavia nel nostro caso, in cui $C^k + \int (gdy - udu)$ esprime la pressione delle molecole di tutto il filo QP alla fine del tempo t, l'integrale di udu dovrassi prendere relativamente alla sola variabile y. In oltre la du, essendo costante la velocità v dell' acqua nella canna, non varierà se non pel variare della posizione della molecola P, cioè della y. Si avrà dunque

$C^k + gy - \frac{u^2}{2}$ per la pressione in P di tutte le molecole della QP.

Per trovar la costante C si osserverà ch' essa deve determinarsi con la condizione, che nel principio dell' integrale, cioè in Q, la pressione deve essere eguale al peso della colonna QK del filo fluido sopra incombente, la quale per essere stagnante (§. 2.° osserv.^{e} 4.^{a}) il fluido del filo medesimo, sarà gh, supposta g la gravità assoluta d' ogni molecola dell' acqua, ed h l' altezza QK. Perciò la pressione in P del fluido QP sarà $= gh + gy - \frac{u^2}{2}$. Onde ottenere la pressione in r del filo intero QPr, basterà nella espressione $gh + gy - \frac{u^2}{2}$ sostituire in luogo di y l' altezza di ab sopra r, la quale altezza chiameremo h', ed in luogo di u la velocità v che ha l'acqua in r (§. 2.° osserv.^{e} 1.^{a}); quindi per la pressione in r del filo QPr si avrà $g(h + h') - \frac{v^2}{2}$; la quale $\Big($osservando, che $h + h'$ è l' altezza del livello AB sopra r, e quest' altezza $= \frac{c^2}{2g}\Big)$ si cambia in quest' altra $\left(\frac{c^2 - v^2}{2}\right)$.

Con lo stesso ragionamento si trova essere $\left(\frac{c^2 - v^2}{2}\right)$ la pressione di ciascun altro filo STs; talmente che la pressione di tutti i fili del gorgo sarà, (supposta α la sezione dc, δ la densità del fluido), $\alpha\delta \left(\frac{c^2 - v^2}{2}\right)$; siccome con altro metodo ho trovato nell' enunziato mio scritto (§. 1.°).

§. 5.°

Formola della Forza motrice quando il moto dell' acqua nella canna è accelerato.

Anche nel caso del moto accelerato dell' acqua nella canna la $C^k + \int (gdy - udu)$ (§. 4.°) esprimerà la pressione in P di tutto il fluido QP; ma è da avvertire che il suo

integrale non sarà, come nel caso del moto uniforme, $C + gy - \frac{v^2}{2}$, per la ragione che esso integrale si dovrà bensì prendere, come nel caso suddetto, relativamente alla sola variabile y, ma la u nel caso del moto accelerato non sarà una funzione della sola y, ma sì bene della y e della velocità dell'acqua della canna, e del tempo.

Per dimostrarlo sia STs la linea percorsa da un'altra molecola S vicinissima alla molecola Q. È facile a conoscere 1.° che il moto del fluido pel cannellino QPrsTS potrà supporsi lineare; 2.° che chiamate x, a le sezioni PT, rs del cannellino medesimo; u, v le velocità del fluido nelle dette sezioni, si avrà $u = \frac{av}{x}$; e $du = \frac{adv}{x} - \frac{avdx}{x^2}$; ed $udu = \frac{a^2vdv}{x^2} - \frac{a^2v^2dx}{x^3} = \frac{adv}{dt} \cdot \frac{dl}{x} - a^2v^2 \cdot \frac{dx}{x^3}$; (sostituendo nel termine $\frac{avdv}{x^2}$, $\frac{a}{x} \cdot \frac{dt}{dl}$ in luogo di v, poichè essendo $v = \frac{ux}{a}$; e $dt = \frac{dl}{u}$, ossia $u = \frac{dl}{dt}$, v diventa $\frac{x}{u} \cdot \frac{dl}{dt}$).

Nel caso adunque del moto accelerato dell'acqua per la canna, la $C + \int(gdy - udu)$ si cambia in $C + \int\left(gdy - \frac{adv}{dt} \cdot \frac{dl}{x} + \frac{a^2v^2dx}{x^3}\right)$, la quale integrata relativamente alle sole variabili l, x, per le ragioni dette di sopra, porgerà $C^k + gy - \frac{adv}{dt}\int\frac{dl}{x} - \frac{a^2u^2}{2x^2}$ per la pressione in P del filo QP.

Per conoscere la costante C si osserverà: che, chiamato N ciò che diventa $\int\frac{dl}{x}$ in Q, la costante dovrà determinarsi con la condizione, che la pressione in Q, dove ha principio l'integrale, cioè quando $y = 0$; $\int\frac{dl}{x} = N$; x eguale alla sezione QS, che supporremo A, dovrà essere eguale al peso del filo KQ, cioè $= gh$, (§. 4.°), perciò la costante sarà eguale a $gh + \frac{adu}{dt}N + \frac{a^2v^2}{2A^2}$; per conseguenza

$gy - \frac{adv}{dt}\int\frac{dl}{x} - \frac{a^2v^2}{2x^2} + gh + \frac{adv}{dt}N + \frac{a^2v^2}{2A^2}$ la pressione di QP in P. E supposto M ciò che diventa $\int\frac{dl}{x}$ in r, per conoscere la pressione in r di tutto il filo QPr basterà, siccome è manifesto, sostituire, nella formola della pressione di QP, h' in luogo di y; luogo di M in $\int\frac{dl}{x}$, a in luogo di x, e per la pressione in r di tutto il filo QPr si avrà $gh' - \frac{adu}{dt}M - \frac{a^2v^2}{2a^2} + gh + \frac{adv}{dt}N + \frac{a^2v^2}{2A^2}$

$$= g(h+h') + \frac{adv}{dt}(N-M) + a^2v\left(\frac{1}{2A^2} - \frac{1}{2a^2}\right)$$

$$= \left(\frac{c^2-v^2}{2}\right) + \frac{adv}{dt}(N-M)$$

imperciocchè $g(h+h') = \frac{c^2}{2}$ (§ 4.°), ed $\frac{1}{2A^2}$ può considerarsi zero in confronto di $\frac{1}{2a^2}$, per la ragione che la sezione A nella quale la velocità è zero (§. 2. osserv.^{e} 4.^{a}) deve essere grandissima in confronto della sezione a dove la velocità è finita.

Con lo stesso ragionamento si troverà $\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right) + \frac{adv}{dt}(N-M)$ per la pressione di ciascun altro filo, di modo che per la pressione di tutti i fili del gorgo sopra $cd = \alpha$, si avrà $\alpha\delta\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right) + \int \alpha\, a\, \frac{dv}{dt}(N-M)$.

Per determinare N, ed M osserveremo che, per l' esperienze di celebri Idraulici, quando il fluido sgorga da un vaso cilindrico inesausto per una luce piccolissima in confronto dell' ampiezza del vaso, l' altezza del gorgo è piccolissima. Potremo adunque supporre le linee QPr, STs (Fig. 1.) prossimamente rette. Inoltre essendo STs vicinissima a QPr, il cannellino QPrsTS potrà supporsi un cono retto troncato QrsS (Fig. 3.), le di cui basi QS, rs sieno eguali alle sezioni QS, rs (Fig. 1.), e i lati rettilinei Qr, Ss (Fig. 3.) eguali alle linee QTr, STs (Fig. 1.).

Ciò posto sia O (Fig. 3.) l' apice del cono, ed YO il suo

asse; $YX = l$; la sezione $PT = x$, come sopra, sarà $OX : XT = OY : YS$, ossia $OY - XY : XT = OY : YS$; perciò $XT = \left(\frac{OY - YX}{OY}\right) YS$ $= YS \frac{(OY - l)}{OY}$. Chiamato π il rapporto del diametro alla circonferenza, l' area circolare della sezione PT, ossia x, sarà $x . \overline{XT}^2$; perciò $x = \pi . \overline{YS}^2 - \frac{(OY - l)^2}{OY^2}$, e per conseguenza $\int \frac{dl}{x} = \frac{\overline{OY}^2}{\pi . YS^2} \int \frac{dl}{(OY - l)^2}$ $= \frac{\overline{OY}^2}{\pi . \overline{YS}^2} \left(\frac{1}{OY - l}\right)$; quindi $N = \frac{\overline{OY}^2}{\overline{YS}^2} \left(\frac{1}{OY}\right)$; (imperciocchè in Y l è eguale a zero), ed $M = \frac{\overline{YO}^2}{\pi . \overline{YS}^2} \left(\frac{1}{OY - Ye}\right)$; ed $M - N = \frac{\overline{OY}^2}{\pi . \overline{YS}^2}$ $\left(\frac{Ye}{OY(OY - Ye)}\right) = \frac{OY . Ye}{\pi . \overline{YS}^2 (OY - Ye)}$; ma $\pi . YS^2 = A$; perciò $M - N =$ $\frac{OY . Ye}{A(OY - Ye)} = \frac{OY . Ye}{A . Oe}$; per conseguenza $a (M - N) = \frac{a}{A} \left(\frac{OY . Ye}{Oe}\right)$; ma a è piccolissima relativamente ad A; perciò $\frac{a}{A}$ si potrà considerare eguale a zero.

La pressione adunque in cd, ossia la forza motrice, nel caso del moto accelerato dell' acqua nella canna, non è perfettamente eguale alla forza motrice nel caso del moto uniforme, ma potrà considerarsi eguale senza incorrere in errore sensibile.

§. 6.°

Altra dimostrazione della formola della forza motrice pel caso del moto uniforme dell' acqua nella canna.

La velocità v effettiva, con la quale l' acqua della vasca sgorga da cd (Fig. 1.) quando c' è la canna, sia dovuta all' altezza per esempio h, la velocità v essendo minore della velocità c con la quale l' acqua della vasca sgorgherebbe se la canna non ci fosse, anche l' altezza cui è dovuta la velocità v sarà minore dell' altezza, alla quale è dovuta la velocità c. Ma l' altezza alla quale è dovuta la velocità c è la distanza H del livello AB sopra cd, perciò l' altezza alla quale è dovuta la velocità v sarà minore dell' altezza H.

Sia quest' altezza eguale alla distanza della sezione $a'b'$ da cd; essendo le velocità dell' acque sgorganti da piccole luci aperte in gran vasi, dovute alle altezze dell' acque sopra le luci, è manifesto che, se fosse tutto ad un tratto tolta via la canna $cdfe$ e l' acqua del vaso giungesse alla sola altezza h di $a'b'$ sopra cd, l' acqua continuerebbe a sgorgare da cd con la velocità v, e se l' acqua giungesse ad un' altezza sopra cd eguale ad $H-h$; l' acqua sgorgherebbe da cd con velocità dovuta all' altezza $H-h$; cioè con velocità $=\sqrt{2g(H-h)}$, ossia $=\sqrt{c^2-v^2}$, poichè $2gH=c^2$; $2gh=v^2$.

Ora se quando c' è la canna, e l' acqua della vasca giunge fino ad AB, cioè all' altezza $(H-h)+h$, l' acqua sgorga con velocità v dovuta alla sola altezza h, è pur forza conchiudere, che si estingue, ossia che rimane virtuale ovvero di sola tendenza la velocità $\sqrt{c^2-v^2}$, dovuta all' altezza $(H-h)$, imperciocchè se non si estinguesse $\sqrt{c^2-v^2}$, l'acqua non sgorgherebbe più con la velocità v, che sarebbe contro la ipotesi.

È dunque indubitato che l'acqua sgorgante da cd, quando c' è la canna, avrà due velocità, l'una effettiva, ed eguale a v, l' altra virtuale, ed eguale a $\sqrt{c^2-v^2}$. Ora per la velocità effettiva v, essendo essa eguale (§. 2.° osserv.e 1.) alla velocità dell' acqua della canna, è chiaro che l' acqua sgorgante non potrà fare forza alcuna sopra l'acqua della canna, e che per la velocità di tendenza $\sqrt{c^2-v^2}$, dovrà fare su l' acqua della canna una pressione eguale al peso d' una colonna d' acqua, che abbia per base l' area premuta cd e per altezza $H-h$, cioè eguale ad $\alpha\delta g(H-h)=\alpha\delta g\left(\frac{c^2}{2g}-\frac{v^2}{2g}\right)$ $\left(\text{per essere } H=\frac{c^2}{2g}, h=\frac{v^2}{2g}\right)=\alpha\delta\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$.

Ciò posto, e non potendo, siccome è evidente, la forza motrice consistere se non nella suddetta pressione, si fa manifesto ch' essa forza sarà misurata dalla formola $\alpha\delta\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$.

§. 7.°

Osservazioni sopra la formola della forza motrice proposta da alcuni Idraulici.

Riflettendo che, se non vi fosse la canna, l'acqua della vasca sgorgherebbe da cd con la velocità c (§. 1.°), si conchiuse da qualche Idraulico: che quando vi sarà la canna piena fino in cd d'acqua mobile con velocità v, l'acqua sgorgante dalla vasca urterà l'acqua della canna con velocità relativa $c-v$, e che perciò la forza con la quale l'acqua della vasca spingerà innanzi l'acqua della canna, consisterà in quell'urto.

A conoscere poi come si avrebbe esso urto a computare si considerò, che, siccome l'urto di una vena, la quale con velocità relativa $c-v$ percuotesse un piano, o ciò che torna allo stesso, che con velocità effettiva c inseguisce un piano mobile con velocità v minore di c, per l'esperienze dei Sigg. Professori Zuliani e Ferrari, e per la Teoria del Sig. de la Grange, sarebbe eguale ad $\alpha\delta(c-v)^2\gamma$ (intendendo per α la sezione della vena, per δ la densità dell'acqua e per γ un coefficiente indeterminato); così anche l'urto dell'acqua sgorgante dalla vasca contro l'acqua della canna vorrà stimarsi con la formola $\alpha\delta(c-v)^2\gamma$ (intendendo per α l'area della luce cd, per δ la densità dell'acqua, e per γ un coefficiente indeterminato).

Intorno a questi ragionamenti io osservo primieramente che, posto anche vero, che la forza motrice si avesse ad esprimere con la formola $\alpha\delta(c-v)^2\gamma$ dell'urto della vena, questa formola non potrebbe con sicurezza applicarsi se non al caso del moto equabile dell'acqua per la canna; imperciocchè tanto per l'esperienze dei Sigg. Zuliani e Ferrari, quanto per la teoria del Sig. de la Grange (a) l'urto della vena

(a) Saggi Scientifici, e letterari dell'Accademia di Padova Tom. 3.° Parte 1.ª Memorie di Turino 1784-1785.

non sarebbe eguale ad $\alpha\delta(c-v)^2\gamma$ se non nel caso che la velocità v del piano fosse costante.

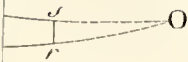
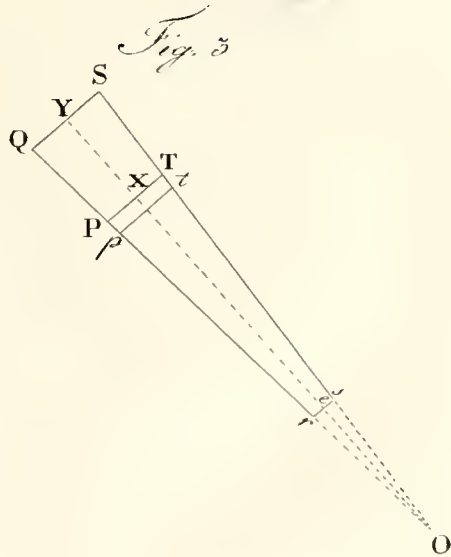
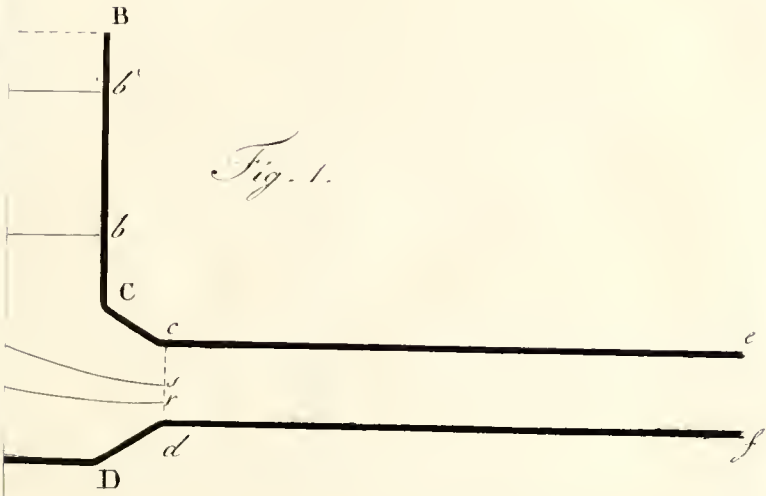
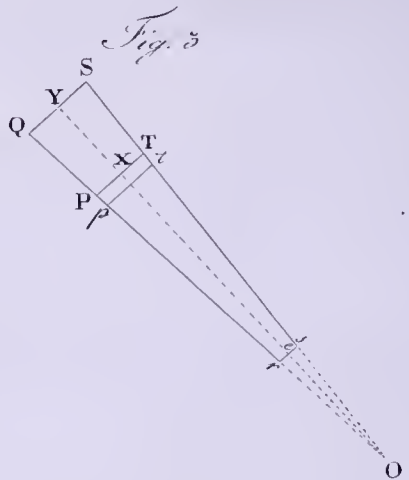
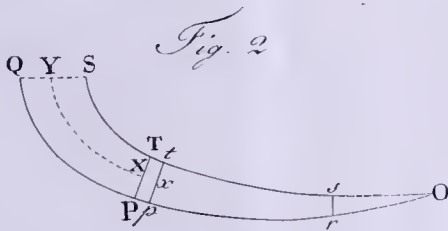
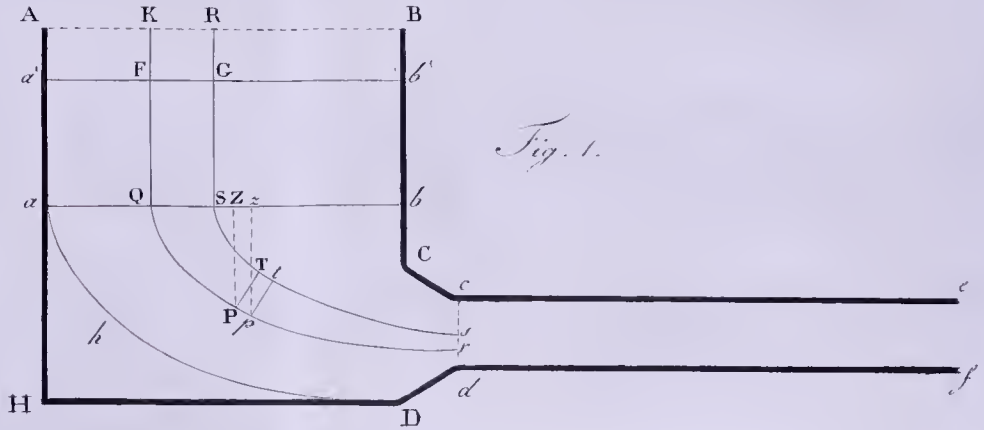
Osservo in secondo luogo, che non è poi nemmen vero, che la forza motrice si possa esprimere con la formola $\alpha\delta(c-v)^2\gamma$ dell'urto della vena, nè pure nel caso del moto equabile dell'acqua nella canna, e ciò perchè non è vero che in tal caso l'acqua sgorgante dalla vasca urti l'acqua della canna con velocità $(c-v)$. Si è veduto (§. 6.°) che l'acqua sgorgante dalla vasca ha le due velocità, v effettiva, $\sqrt{c^2-v^2}$ virtuale; che per la effettiva l'acqua sgorgante non urta, nè preme l'acqua della canna, e che per la velocità virtuale $\sqrt{c^2-v^2}$ l'acqua sgorgante fa sopra l'acqua della canna una pressione, e che questa pressione è eguale ad $\alpha\delta\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$.

Persnaso pei suddetti ragionamenti che la forza motrice abbiasi ad esprimere con la formola $\alpha\delta(c-v)^2\gamma$ lo stesso Idraulico cercò di determinare il coefficiente γ, e disse ch' esso deesi prendere $=1$; 1.° perchè l'urto della vena, nel caso che in tutti i filetti si estinguesse per l'incontro del piano la velocità $(c-v)$, per le stesse sperienze del Zuliani, e per la teorica stessa del la Grange, sarebbe eguale ad $\alpha\delta(c-v)^2$. 2.° perchè in tutti i fili dell'acqua sgorgante si estingue $(c-v)$.

Si è veduto che nell'acqua sgorgante dalla vasca per la opposizione dell'acqua della canna si estingue $\sqrt{c^2-v^2}$, e che per l'estinzione di questa velocità l'acqua sgorgante preme l'acqua della canna con forza eguale ad $\alpha\delta\left(\frac{c^2-v^2}{2}\right)$.

B
b'
b
C
c
e
s
r
d
f
D
Fig. 1.
Fig. 3
S
Y
Q
T
X
t
P
p
O
s
r
O

A
K
R
B
a'
F
G
b'
Fig. 1.
a
Q
S
Z
z
b
C
T
t
c
e
P
p
s
r
h
H
d
f
D

Fig. 3
S
Y
Q
T
t
X
P
p
Fig. 2
Q
Y
S
T
t
X
x
s
O
P
p
r
s
r
O

SOLUZIONE GENERALE

DI UN PROBLEMA DI PROBABILITA'

Del Signor Giovanni Plana

Ricevuta li 17. *Luglio* 1815.

1. Dopo la altrettanto felice che importante scoperta del principio dei *minimi quadrati*, il celebre Geometra Signor Conte *Laplace* ha cercato per via di un' analisi molto ingegnosa l' espressione analitica dell' error medio da temersi sopra i risultati medii di un grandissimo numero di osservazioni ottenuti mediante l' applicazione del predetto principio. Rinvenne egli tosto, che questa espressione conteneva un rapporto, del quale è impossibile di calcolarne il valore *a priori* a meno che non si voglia aver per nota la legge di facilità di ciaschedun' errore, ed ognun sa, che una tale ipotesi è affatto inammissibile nelle principali quistioni di Astronomia e di Fisica, nelle quali si suole far uso di questo metodo. Fortunatamente questo medesimo rapporto ricomparisce nella soluzione di un altro problema, il quale dà un mezzo facile di determinarlo, se non esattamente, almeno con somma probabilità, ed ecco in qual modo.

Cercando la probabilità che si ha perchè la somma dei quadrati degli errori di un gran numero di osservazioni sia eguale ad una quantità data, il Signor Laplace osservò, che questa probabilità acquista il massimo del suo valore, quando la quantità data diventa eguale al prodotto del rapporto di cui si tratta per un numero per altra via noto; egli, in forza di questa conseguenza, conchiuse che si poteva supporre quest' ultima quantità eguale alla somma dei quadrati degli errori, quale si otteneva mediante la sostituzione dei risultati medii nelle equazioni di condizione, d'onde si ricava con tutta facilità il rapporto cercato.

Noi riassumiamo in questa memoria l'analisi del Signor

Laplace per far vedere, che essa si addatta ad una qualunque funzione degli errori. E considerando particolarmente il caso in cui questa funzione viene espressa per una potenza intera e positiva degli errori, presi tutti positivamente, ne ricaveremo un teorema degno di attenzione per la sua semplicità, il quale comprende siccome un caso particolare, quello trovato dal Signor Laplace.

2. Alla soluzione del problema, che abbiamo principalmente in vista, noi faremo precedere alcuni risultati, dei quali se ne vedrà l' uso in seguito.

È dimostrato in varie opere, che assumendo $x=-\infty$, e $x=+\infty$ per limiti dell' integrazione si ha,

$$\int dx.c^{-x^2}=\sqrt{\pi},$$

ove c rappresenta la base dei Logaritmi Iperbolici, e π la lunghezza della semi-periferia del circolo che ha l' unità per raggio. Di là ne deriva, che dentro gli stessi limiti si ha,

$$\int dx.c^{-x^2-2ax}=c.^{a^2}\sqrt{\pi}$$

qualunque sia il valore di a reale od imaginario. Infatti svolgendo c^{-2ax}, noi abbiamo,

$$\int dx.c^{-x^2-2ax}=\int dx.c^{-x^2}\left(1-2ax+\frac{\overline{2ax}^2}{1.2}-\frac{\overline{2ax}^3}{1.2.3}+\text{ec.}\right):$$

Ma egli è provato (*V. Exercices de Calcul Intégral de Legendre*) che, integrando dall' infinito negativo fino all' infinito positivo si hanno le equazioni

$$\int dx.x^{2i+1}.c^{-x^2}=0,$$

$$\int dx.x^{2i}.c^{-x^2}=\frac{1.3.5.7......2i-1}{2^i}.\sqrt{\pi}$$

per qualunque valore intero e positivo di i; dunque si avrà,

$$\int dx.c^{-x^2-2ax}=\sqrt{\pi}.\left(1+\frac{\overline{2a}^2}{1.2}.\frac{1}{2}+\frac{\overline{2a}^4}{1.2.3.4}.\frac{1.3}{2^2}+\frac{\overline{2a}^6}{1.2.3.4.5.6}.\frac{1.3.5}{2^3}+\text{ec.}\right)$$

ossia

$$\int dx.c^{-x^2-2ax}=\sqrt{\pi}.\left(1+a^2+\frac{a^4}{1.2.}+\frac{a^6}{1.2.3.}+\text{ec.}\right)=c^{a^2}\sqrt{\pi}.$$

Ora, se noi facciamo $a=\beta\cdot\sqrt{-1}$, questa formola ci dà,

$$\int dx\,.\,c^{-x^2-2\beta x\sqrt{-1}}=c^{-\beta^2}\sqrt{\pi}\,.$$

Avrei potuto stabilire immediatamente questa equazione facendo osservare, che

$$\int dx\,.\,c^{-x^2-2ax}=c^{a^2}\,.\int dx\,.\,c^{-(x+a)^2}$$

ma sotto questa forma il risultato dell'integrazione cessa d'essere evidente per i valori immaginarii di a stante che gli stessi limiti diventano immaginarii. Per questo motivo ho creduto dover preferire la prima dimostrazione abbenchè più lunga.

Dai precedenti risultati ne emergono i due seguenti, i quali hanno luogo integrando da $x=-\infty$ fino ad $x=+\infty$;

$$\int dx\,.\,x^{2i}\,.\,c^{-x^2-2ax}=$$

$$\frac{1.3.5.7..(2i-1)}{2^i}\,.\,c^{a^2}\sqrt{\pi}\,.\left(1+\frac{i}{1.2}.\overline{2a}^2+\frac{i.(i-1)}{1.2.3.4}\,\overline{.2a}^4+\frac{i.(i-1)(i-2)}{1.2.3.4.5.6}\,.\,\overline{2a}^6+\text{ec.}\right);$$

$$\int dx.x^{2i+1}\,.\,c^{-x^2-2ax}=$$

$$-\frac{1.3.5.7...(2i+1)}{2^i}.ac^{a^2}\sqrt{\pi}.\left(1+\frac{i}{1.2.3}.\overline{2a}^2+\frac{i.(i-1)}{1.2.3.4.5}.\overline{2a}^4+\frac{i.(i-1)(i-2)}{1.2.3.4.5.6.7}.\overline{2a}^6+\text{ec.}\right)$$

3. Ecco presentemente il problema generale, che si tratta di risolvere. Sia,

$$X^m=\left(B.x^0+B_1x^{a_1}+B_2.x^{a_2}+B_3x^{a_3}+\ldots+B_nx^{a_n}\right)^m,$$

si domanda una serie convergente per determinare il coefficiente di una data potenza di x dello svolgimento di X^m supposto m numero intero positivo, e grandissimo. Il termine generale, tanto dei coefficienti B quanto degli esponenti a può essere una qualunque funzione dell'indice i. Si suppone soltanto, che tale sii la funzione relativa ai coefficienti, che abbia la proprietà di decrescere mentre crescono i valori di i.

La quantità cercata essendo per sua natura indipendente da x, egli è permesso di fare $x=c^{\varpi\sqrt{-1}}$, e per conseguenza,

$$X^m = \left(B + B_1 c^{a_1 \varpi \sqrt{-1}} + B_2 c^{a_2 \varpi \sqrt{-1}} + B_3 c^{a_3 \varpi \sqrt{-1}} \ldots + B_n c^{a_n \varpi \sqrt{-1}}\right)^m.$$

Ciò posto, chiamiamo x^ρ la potenza di x, di cui si domanda il coefficiente; egli è chiaro, che si avrà questo coefficiente prendendo il termine indipendente da ϖ, che si trova nello svolgimento della funzione

$$Y = c^{-\rho\varpi\sqrt{-1}} . X^m .$$

Sia Q questo termine: mediante il cambiamento delle funzioni esponenziali in funzioni circolari, il valore di Y diventerà della forma,

$Q + S. A_i \cos. i\varpi + \sqrt{-1} . S. A_i \operatorname{sen}. i\varpi$, e per conseguenza si avrà

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int d\varpi . c^{-\rho\varpi\sqrt{-1}} . X^m ,$$

integrando da $\varpi = -\pi$ fino a $\varpi = +\pi$.

Ora, se si osserva, che $X^m = c^{m \log. X}$, ne seguirà

$$2\pi Q = \int d\varpi \, c^{-\rho\varpi\sqrt{-1} + m \log. X} .$$

Svolgendo $\log. X$ secondo le potenze di ϖ si ottiene una serie della forma,

$\log. X = \log. F + (\alpha\varpi + \alpha'\varpi^3 + \alpha''\varpi^5 + \text{ec.})\sqrt{-1} - \beta\varpi^2 + \beta'\varpi^4 + \beta''\varpi^6 + \text{ec.}$

dunque, fatto $u = m\varpi$, si avrà

$$2\pi m Q = F^m . \int du . c^{\left[(\alpha - \frac{\rho}{m})u + \frac{\alpha'}{m^2} u^3 + \frac{\alpha''}{m^5} u^5 + \text{ec.}\right]\sqrt{-1} - \frac{\beta}{m} . u^2 + \frac{\beta'}{m^3} . u^4 + \frac{\beta''}{m^5} u^6 + \text{ec.}}$$

ossia,

$$2\pi m Q = F^m . \int du . c^{-\frac{\beta}{m} . u^2 + (\alpha - \frac{\rho}{m})\, u . \sqrt{-1}} \left[1 + \left(\frac{C}{m^2} u^3 + \frac{C'}{m^4} . u^5 + \text{ec.}\right)\sqrt{-1} + \left(\frac{H}{m^3} . u^4 + \frac{H'}{m^5} . u^6 + \text{ec.}\right.\right.$$

supponendo,

$$c^{\left(\frac{\alpha'}{m^2} u^3 + \frac{\alpha''}{m^4} . u^5 + \text{ec.}\right)\sqrt{-1} + \frac{\beta'}{m^3} u^4 + \frac{\beta''}{m^5} u^6 + \text{ec.}}$$

$$= 1 + \left(\frac{C}{m^2} u^3 + \frac{C'}{m^4} . u^5 + \text{ec.}\right)\sqrt{-1} + \frac{H}{m^3} u^4 + \frac{H'}{m^5} u^6 + \text{ec.}$$

I limiti di u sono $-m\pi$ e $+\pi m$; ma stante la grandezza di m si può senza errore sensibile integrare da $u=-\infty$ fino ad $u=+\infty$: I termini componenti il valore di $2\pi m$Q si potranno in conseguenza integrare mediante le formole generali poste nel N.° 2. Per eseguire questa integrazione facciamo $u=z\sqrt{\frac{m}{\beta}}$, si avrà

$$2\pi Q\sqrt{m\beta}=F^m.\int dz.c^{-z^2-\sqrt{\frac{m}{\beta}}.(\alpha-\frac{\rho}{m})z\sqrt{-1}}\left(1+\frac{Hz^4}{m\beta^2}+\frac{H'z^6}{m^2\beta^3}+\text{ec.}\right),$$

omettendo la parte moltiplicata per $\sqrt{-1}$, la quale deve necessariamente svanire per essere Q quantità reale, e β quantità reale positiva, siccome dimostreremo in seguito. Il risultato di questa integrazione darà una serie, che procede secondo le potenze negative di m, la quale sarà per conseguenza tanto più convergente quanto più grande sarà il numero m: ma in quasi tutti i casi si possono trascurare le quantità divise per $m\sqrt{m}$, ed allora si ha,

$$Q=\frac{F^m}{2\pi\sqrt{m\beta}}.\int dz.c^{-z^2-\sqrt{\frac{m}{\beta}}\left(\alpha-\frac{\rho}{m}\right)z\sqrt{-1}}$$

ed integrando da $z=-\infty$ fino a $z=+\infty$,

$$Q=\frac{F^m}{2\sqrt{m\pi\beta}}.c^{-\frac{(\alpha m-\rho)^2}{4m\beta}}\quad\ldots\ldots\quad(I).$$

Cerchiamo presentemente i valori delle due costanti α e β, che entrano in questa formola.

Svolgendo il valore di X secondo le potenze di ϖ si trova.

$$X=B+S.B_i+\varpi\sqrt{-1}.S.B_i a_i-\frac{\varpi^2}{1.2}.S B_i a_i^2+\text{ec.},$$

ove la caratteristica S deve essere estesa a tutti i valori di i da $i=1$ fino ad $i=n$. Facciamo per maggior semplicità,

$$F=B+S.B_i;\ F'=S.B_i a_i;\ F''=S.B_i a_i^2;\ \text{ec.}$$

avremo,

$$\log.X=\log.F+\log.\left(1+\varpi\sqrt{-1}.\frac{F'}{F}-\frac{\varpi^2}{2}.\frac{F''}{F}+\text{ec.}\right),$$

e svolgendo,

$$\log.X = \log.F + \varpi\sqrt{-1}\,.\,\frac{F'}{F} - \frac{\varpi^2}{2}\,.\left(\frac{F''}{F} - \frac{F'^2}{F^2}\right) + \text{ec.}$$

Questa equazione ci dà,

$$\alpha = \frac{F'}{F}$$

$$\beta = \frac{FF'' - F'^2}{2F^2}\,.\;\;\ldots\ldots\;(II)$$

4. Applichiamo le formole trovate al caso in cui si ha,

$$B_i = \varphi\,.\left(\frac{x}{n}\right),\;\; a_i = x^{\tau},$$

τ essendo un numero intero positivo, e $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ una qualunque funzione di x, la quale decresce a misura che aumenta x. Basterà di fare successivamente $x = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots n$ per avere tutti i valori di B_i ed a_i. Sia $\frac{x}{n} = x'$, $\frac{1}{n} = \Delta x'$, avremo,

$$F = B + n\,.S\,.\Delta x'\varphi(x'),$$

$$F' = n^{\tau+1}.S\,.\Delta x' x'^{\tau}\varphi(x');$$

$$F'' = n^{2\tau+1}.S.\Delta x'.x'^{2\tau}\varphi(x').$$

Si potrà adunque trovare il valore di queste costanti, mediante le note formole sul Calcolo integrale delle differenze finite; ma supponendo n numero grandissimo, siccome ciò ha luogo nelle quistioni alle quali si applica questa teoria, si potrà cambiare $\Delta x'$ in dx', ed il segno S in quello degli integrali ordinarii, di modo che integrando da $x' = 0$ fino ad $x' = 1$ si avrà.

$$F = n.\int dx'.\varphi(x'),$$

$$F' = n^{\tau+1}\int dx'.x'^{\tau}\varphi(x'),$$

$$F'' = n^{2\tau+1}\int dx'.x'^{2\tau}\varphi(x').$$

Ora se noi facciamo

$$h = \int dx'\varphi(x'),\;\; h' = \int dx'.x'^{\tau}\varphi(x'),\;\; h'' = \int dx'.x'^{2\tau}\varphi(x')$$

ne risulterà,

$$\alpha = n^{\tau}\cdot\frac{h'}{h},\;\; \beta = \frac{n^{2\tau}(hh'' - h'^2)}{2h^2}.$$

Sostituendo questi valori nella formola (I) si troverà, che fatto,

$$\rho = am + n^{\tau} q\sqrt{m} = n^{\tau} \cdot \frac{mh'}{h} + n^{\tau} q\sqrt{m}, \quad \ldots\ldots (a)$$

$$E = \frac{h}{\sqrt{hh'' - h'^2}},$$

si ha,

$$Q = \frac{(nh)^m . E}{n^{\tau} \sqrt{2m\pi}} . c^{-\frac{q^2 E^2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

5. Questo valore di Q diventarebbe immaginario, ove la quantità $hh'' - h'^2$ acquistasse un valore negativo; ma senza conoscere la forma della funzione $\phi(x')$ si può dimostrare, che questa costante rimane sempre positiva, purchè $\phi(x')$ abbia la proprietà di diminuire a misura che x' aumenta. Osserviamo in primo luogo, che se noi prendiamo $\phi(x') = 1$ si ottiene $h = 1$, $h' = \frac{1}{\tau + 1}$, $h'' = \frac{1}{2\tau + 1}$, e per conseguenza $\frac{h''}{h} = \frac{1}{2\tau + 1}$. Nel caso generale dico, che noi abbiamo $\frac{h''}{h} < \frac{1}{2\tau + 1}$, ossia $h''(2\tau + 1) < h$.

Infatti, sostituendo in vece di h e h'' i loro valori si avrà,

$$\int dx' \phi(x') > (2\tau + 1) \int dx' . x'^{2\tau} \phi(x');$$

e siccome i limiti dell' integrazione sono $x' = 0$, $x' = 1$, se noi dimostriamo che

$$x'^{2\tau} \int dx' \phi(x') > (2\tau + 1) \int dx' . x'^{2\tau} \phi(x')$$

si dovrà *a fortiori* ammettere l' ineguaglianza precedente. Differenziando e dividendo da ambe le parti per $x'^{2\tau - 1}$ si trova $x'\phi(x') < \int dx' \phi(x')$: differenziando di nuovo, questa ineguaglianza diventa $\frac{x' d.\phi(x')}{dx'} < 0$; ciò che è effettivamente vero, giacchè $\phi(x')$ decrescendo a misura che x' aumenta, $\frac{d.\phi(x')}{dx'}$ deve essere negativo. Egli è adunque provato che $hh'' < \frac{h^2}{2\tau + 1}$. Ciò posto sarà dimostrato che $hh'' > h'^2$, facendo

vedere, che si ha $\frac{h^2}{2\tau+1} > h'^2$, ossia $h > h'\sqrt{2\tau+1}$. A quest' oggetto rimettiamo in vece di h e di h' i loro valori, si avrà,

$$\int dx'\varphi(x') > \sqrt{2\tau+1} \,.\int dx'.x'^{\tau}\varphi(x').$$

Per mettere questa ineguaglianza fuori di dubbio basta provare che,

$$x'^{\tau}\int dx'\varphi(x') > \sqrt{2\tau+1}\,.\int dx'.x'^{\tau}\varphi(x'):$$

Infatti differenziando e dividendo da ambe le parti per $x'^{\tau-1}$ si trova,

$$\tau\int dx'\varphi(x') > (\sqrt{2\tau+1} - 1)\, x'\varphi(x');$$

di quì mediante una nuova differenziazione si deduce

$$\left(\sqrt{2\tau+1} - \tau - 1\right)\varphi(x') + \left(\sqrt{2\tau+1} - 1\right)x'\frac{d.\varphi(x')}{dx'} < 0,$$

risultato incontestabile, giacchè $\tau + 1 > \sqrt{2\tau+1}$, e $x'\frac{d\,\varphi(x')}{dx'} < 0$.

6. La formola (b) trovata nel N.° precedente dà la probabilità che si ha perchè la somma delle potenze τ degli errori di un grandissimo numero m di osservazioni sia eguale ad una data quantità ρ, supponendo che $\Psi\left(\frac{x}{n}\right)$ rappresenta la legge di facilità di un errore x e prendendo

$$\varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \Psi\left(\frac{x}{n}\right) + \Psi\left(-\frac{x}{n}\right).$$

Giusta la teoria delle combinazioni egli è chiaro, che la ricerca di questa probabilità si riduce a quella del coefficiente di x^{ρ} che si trova nello svolgimento della potenza m di un polinomio simile a quello, che noi abbiamo chiamato X al principio del N.° 3. (*)

(*) Questo teorema si dimostra facilmente considerando le combinazioni di m poliedri simili, i piani di ciascheduno de' quali sieno segnati coi numeri 0, a_1, a_2, a_3, ... a_n di maniera che B, B_1, B_2, B_3, ... B_n rappresentino le probabilità corrispondenti per avere al primo colpo i numeri della prima serie. Del resto si può consultare a questo proposito l'eccellente opera di *Moivre* intitolata *Doctrine of chances*.

Siccome la facilità di un errore non è altra cosa, che il rapporto del numero dei casi in cui ha luogo al numero totale dei casi, ne segue che la somma intera di questi rapporti deve dare la certezza ossia l'unità; si avrà adunque $F = nh = 1$, e per conseguenza

$$Q = \frac{E}{n.^{\tau}\sqrt{2m\pi}} \cdot c^{-\frac{q^2E^2}{2}}.$$

Questa espressione acquista il massimo suo valore quando $q = 0$; ma in questo caso la formola (a) trovata nel numero precedente diventa, $\rho = \frac{n^{\tau}mh'}{h}$; dunque fatto $n = \alpha$, la somma la più probabile delle potenze τ degli errori, presi tutti positivamente, sarà espressa dalla seguente semplicissima formola,

$$\frac{ma^{\tau}h'}{h} = \frac{ma^{\tau}.\int dx'.x'^{\tau}\phi(x')}{\int dx'.\phi(x')} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

Quì vuolsi osservare, che a rappresenta il massimo errore possibile misurato coll'unità della specie che gli conviene, e che tutti gli errori si dovranno per conseguenza valutare colla medesima unità. Era necessario per la soluzione del problema di immaginar diviso in un grandissimo numero n di parti l'intervallo compreso fra zero ed a, onde poter comprendere nel raziocinio tutti i numeri che trovansi in questo intervallo; ma ora possiamo fare astrazione dal numero n, il quale non entra nella formola (A).

Volendo supporre, siccome pare nàturale, che la probabilità degli errori non cambia col cambiar di segno ai medesimi, ne seguirà che $\Psi\left(\frac{x}{n}\right) = \Psi\left(-\frac{x}{n}\right)$, e per conseguenza $\phi(x') = 2\Psi(x')$. Sostituendo questo valore nella formola (A), essa si trasformerà nella seguente,

$$\frac{ma^{\tau}.\int dx'.x'^{\tau}\Psi(x')}{\int dx'\Psi(x')} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (B),$$

ove i limiti dei due integrali sono $x' = 0$, $x' = 1$. Facendo $\tau = 2$, questo risultato si accorderà con quello ottenuto dal

Signor Laplace (*V. p.* 312. *Théorie Analytique des Probabilités*).

7. Cerchiamo presentemente la probabilità, che la somma delle potenze τ degli errori, presi tutti positivamente, si troverà compresa fra due dati limiti. Ad un tal fine riassumiamo le due equazioni

$$Q = \frac{E}{n^\tau . \sqrt{2m\pi}} . c^{-\frac{q^2E^2}{2}},$$

$$\rho = \frac{n^\tau m h'}{h} + q . n^\tau \sqrt{m}$$

ed osserviamo, che dovendo ρ, sotto questa forma, essere numero intero si dovrà prendere per q un multiplo di $\frac{1}{n^\tau \sqrt{m}}$. È chiaro adunque, che se noi facciamo $\Delta q = \frac{1}{n^\tau \sqrt{m}}$ si avrà

$$\frac{2E}{\sqrt{2\pi}} . S . \Delta q . c^{-\frac{q^2E^2}{2}}$$

per espressione della probabilità, che il valore di ρ si troverà compreso fra i limiti,

$$\frac{mn^\tau h'}{h} - qn^\tau \sqrt{m}, \quad \frac{mn^\tau h'}{h} + qn^\tau \sqrt{m}.$$

Siccome Δq è una frazione estremamente piccola ne viene in conseguenza, che

$$\frac{2E}{\sqrt{2\pi}} S . \Delta q . c^{-\frac{q^2E^2}{2}} = \frac{2E}{\sqrt{2\pi}} \int dq . c^{-\frac{q^2E^2}{2}} \quad \ldots (\alpha),$$

ove l'integrazione deve estendersi da $q = 0$ fino a $q = q$. La formola (α) dà la probabilità, che il valore di ρ si troverà compreso fra i limiti.

$$\frac{ma^\tau h'}{h} - a^\tau q\sqrt{m}, \quad \frac{ma^\tau h'}{h} + a^\tau q\sqrt{m};$$

e dividendo questi limiti per m, la medesima formola (α) darà la probabilità, che il valore medio di ρ si troverà compreso fra i limiti

$$\frac{a^\tau h'}{h} - \frac{a^\tau q}{\sqrt{m}}, \quad \frac{a^\tau h'}{h} + \frac{a^\tau q}{\sqrt{m}}$$

ove a rappresenta il massimo errore possibile. Supposti invariabili questi limiti, il valore di q crescerà con quello di m, e per conseguenza il valore dato dalla formola (α) sarà sempre più prossimo alla certezza. Supposto inoltre, che $\frac{a^{\tau}q}{\sqrt{m}}$ è una frazione piccolissima, si potrà, moltiplicando le osservazioni, ottenere quel grado di probabilità che si desidera, e $\frac{a^{\tau}h'}{h}$ sarà prossimamente il valore medio di ρ.

Chiamando adunque $S.e^2$ la somma dei quadrati degli errori di un grandissimo numero di osservazioni egli è molto probabile, che questa somma sarà prossimamente eguale ad $\frac{ma^2h'}{h}$, onde stabilita l'equazione

$$\frac{ma^2h'}{h}=S\ .\ e^2$$

se ne ricaverà il valore di

$$\frac{\int dx'.x'^2\,\Psi(x')}{\int dx'\Psi(x')}=\frac{S\,.\,e^2}{ma^2}$$

senza conoscere la forma di $\Psi(x')$. Tale è il modo con cui il Signor *Laplace* ha determinato il rapporto di questi due integrali definiti. Conosciuta questa quantità non v' ha più difficoltà veruna per trovare il valore dell' error medio, siccome si vede nell' opera precitata (pag. 328-329).

8. Le formole dianzi esposte danno con tanta facilità la soluzione del problema che ha per oggetto la ricerca della *vita media* della specie umana, che io non posso astenermi dall' aggiunger quì una sì bella applicazione del calcolo delle probabilità.

In primo luogo egli è necessario di chiaramente spiegare ciò che noi intendiamo per vita media. Ad un tal fine, chiamiamo n la massima età a cui l' uomo può arrivare; x una qualunque altra età compresa fra zero, ed n; e $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ una funzione di x, la quale rappresenta la probabilità che ha un fanciullo appena nato per vivere fino all' età espressa

per x. Ciò posto, la somma di tutte le età possibili moltiplicate per la probabilità corrispondente, ossia la quantità $S.x\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ sarà quella che noi chiameremo vita media. Se si osserva, che il prodotto $x\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ è quella sola porzione della vita x a cui si ha diritto nascendo, ne verrà in conseguenza, che la somma di tutte queste porzioni costituisce l'età che si può accordare ad un fanciullo appena nato, volendo seguire le leggi della probabilità.

Supponiamo i numeri x ed n divisi in un grandissimo numero di parti, e facciamo $\frac{x}{n}=x'$, $\frac{1}{n}=dx'$; si avrà integrando da $x'=0$ fino ad $x'=1$

$$S\,x.\varphi\left(\frac{x}{n}\right)=n^2\int x'dx'.\varphi(x').$$

Vediamo ora in qual modo si può trovare il valore di questa quantità senza supporre nota la funzione $\varphi(x')$.

La probabilità, che la somma totale delle vite di un grandissimo numero m di fanciulli sia eguale ad una data quantità p si ottiene calcolando il coefficiente di x^p, che nasce dallo svolgimento del polinomio

$$\left[\varphi\left(\frac{0}{n}\right)+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)x+\varphi\left(\frac{2}{n}\right).x^2+\varphi\left(\frac{3}{n}\right).x^3\ldots+\varphi\left(\frac{n}{n}\right).x^n\right]^m.$$

Basterà adunque di supporre $\tau=1$ nelle formole del N.° 6. per farne l'applicazione al caso di cui si tratta. Di qui ne risulta, che se noi facciamo,

$$K=\int dx'\varphi(x'),\quad K'=\int x'dx'\varphi(x'),\quad K''=\int x'^2dx'\varphi(x')$$

$$\beta^2=\frac{K^2}{KK''-K'^2}$$

avremo

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\int\beta dq.c^{-\frac{q^2\beta^2}{2}}\quad\ldots\ldots(\alpha')$$

per espressione della probabilità, che la somma delle vite di m fanciulli sarà compresa fra i limiti

$$\frac{nmK'}{K}-qn\sqrt{m},\qquad\frac{nmK'}{K}+qn\sqrt{m}.$$

Dividendo questi due limiti per m, la medesima formola (α') dà le probabilità che la somma intera delle vite divisa per m sarà compresa fra i limiti

$$\frac{nK'}{K}-\frac{qn}{\sqrt{m}}\,,\ \frac{nK'}{K}+\frac{qn}{\sqrt{m}}\,.$$

Chiamando a la massima età espressa in anni si potrà ora sostituire a in luogo di n in questi limiti, i quali diventeranno

$$a^2K'-\frac{qa}{\sqrt{m}}\,,\ a^2K'+\frac{qa}{\sqrt{m}}\,,$$

osservando che $nK=1$, giusta quanto è stato detto nel N.° 6. Presentemente, se noi supponiamo a q un valore di mediocre grandezza, ne seguirà che la probabilità data dalla formola (α') (la quale deve essere integrata da $q=0$ fino $q=q$,) sarà vicinissima alla certezza, e che $\frac{qa}{\sqrt{m}}$ non cesserà di rappresentare una frazione piccolissima stante la grandezza supposta del numero m: dunque chiamando T la somma osservata delle vite divisa per m, si potrà, senza grave errore, supporre $T=a^2K'$, ossia,

$$T=a^2\int x'\,dx'\varphi\,(x')=\text{vita media}.$$

Tanto più sarà esatto questo modo di determinare la vita media quanto più sarà grande il numero de' fanciulli, de' quali si sarà osservata l' epoca della nascita e della morte. Ma chi volesse avere una più precisa idea sull' errore da temersi in più o in meno in questa determinazione, potrà acquistarla agevolmente, riducendo in numeri la seguente formola del Signor Laplace,

$$\frac{\sqrt{H-T^2}}{\sqrt{2m\pi}}\,,$$

nella quale H rappresenta la somma dei quadrati delle vite divisa per m. (*V. Théorie Analytique des Probabilités pag.* 411).

Nota sopra l' integrazione di un' Equazione differenziale data da Euler

Euler, nel Tomo secondo del suo Calcolo Integrale (pag. 458) asserisce che la formola,

$$y = A.e^{x.\cos.\theta}.\cos.(x\sin.\theta + \xi),$$

soddisfa, siccome valore particolare, all'equazione

$$0 = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} \; \ldots\ldots + \frac{d^\infty y}{dx^\infty}$$

di ordine infinito

Il seguente calcolo proverà, parmi, che questo teorema non può sussistere. Infatti, differenziando il supposto valore di y, e facendo per maggior semplicità,

$$p = \text{sen}(x.\sin.\theta + \xi), \quad q = \cos.(x.\sin.\theta + \xi)$$

si ottiene,

$$\frac{dy}{dx} = A.e^{x\cos.\theta}.(q.\cos.\theta - p.\sin.\theta);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A.e^{x\cos.\theta}.(q\cos.^2\theta - 2p\sin.\theta.\cos.\theta - q\sin.^2\theta);$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = A.e^{x\cos.\theta}.(q\cos.^3\theta - 3p.\cos.^2\theta.\sin.\theta - 3q\cos.\theta.\sin.^2\theta + p\sin.^3\theta);$$

. . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = A.e^{x\cos.\theta}.\left\{\begin{matrix} q.\cos.^n\theta - np.\cos.^{n-1}\theta.\sin.\theta - \frac{n(n-1)}{1.2}q\cos.^{n-2}\theta.\sin.^2\theta \\ + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}p\cos.^{n-3}\theta.\sin.^3\theta + \ldots\ldots\ldots \end{matrix}\right\}$$

Ora da queste equazioni facilmente se ne deduce che,

$$y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} \; \ldots\ldots + \frac{d^\infty y}{dx^\infty}$$

$$= A.e^{x\cos.\theta}.q(1 + \cos.\theta + \cos.2\theta + \cos.3\theta \ldots + \cos.\infty\theta)$$

$$- A.e^{x\cos\theta}.p(\sin.\theta + \sin.2\theta + \sin.3\theta \ldots + \sin.\infty\theta):$$

Ma egli è dimostrato nell' Introduzione all' Analisi d' *Euler*, che si ha,

$$\cos.\theta + \cos.2\theta + \cos.3\theta \; . \; . \; . \; . + \cos.\infty\,\theta = -\tfrac{1}{2},$$

$$\sin.\theta + \sin.2\theta + \sin.3\theta \; . \; . \; . \; . + \sin.\infty\,\theta = \tfrac{1}{2}.\cot.\tfrac{1}{2}\theta,$$

dunque si avrà,

$$y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . + \frac{d^\infty y}{dx^\infty}$$

$$= \frac{A}{2}.e^{x\cos.\theta}.\left[\cos.(x\sin.\theta + \xi) - \cot.\tfrac{1}{2}\theta.\sin.(x\sin.\theta + \xi)\right]$$

$$= \frac{A}{2}.e^{x\cos.\theta}.\left[\frac{\cos.(x\sin.\theta+\xi) - \cos.\,x\sin\,\theta+\xi-\theta}{1-\cos.\theta}\right],$$

osservando che $\cot.\frac{1}{2}\,\theta = \frac{\sin.\theta}{1-\cos.\theta}$.

Presentemente è chiaro, che il secondo membro della precedente equazione non può diventar zero per qualsivoglia valore dato alle due costanti ξ, θ, siccome vorrebbe *Euler*, giusta quanto soggiunge nelle ultime linee della pag. 458. Vuolsi osservare, che facendo θ eguale ad un multiplo dell' intera periferia del circolo, la medesima espressione prende la forma $\frac{0}{0}$, e che nel caso attuale non è punto eguale a zero il suo valore.

Del resto non è difficile di dimostrare *a priori* l'impossibilità di soddisfare all'equazione di cui si tratta per via di un' espressione esponenziale. Ad un tal fine, osservisi, che posto, $y = e^{mx}$, si ha per determinare la costante m l'equazione

$$0 = 1 + m + m^2 + m^3 \; . \; . \; . \; . + m^\infty,$$

cui non può soddisfare verun valore finito di m nè reale, nè immaginario, stante che il secondo membro di essa non è altra cosa che lo svolgimento della frazione

$$\frac{1}{1-m}$$

Supposte giuste queste mie riflessioni converrà tirarne la consegnenza, che non può aversi per vera l' integrale dell' equazione

$$X = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} \; . \; . \; . \; . \; . \; . + \frac{d^\infty y}{dx^\infty},$$

che *Euler* dà alla pag. 460. del dianzi citato Libro.

LETTERA

AL SIGNOR ANTONIO CAGNOLI

Del Sig. Abbate Pietro Cossali

Ricevuta li 19. Febbrajo 1815.

Fra i tentativi fatti sulle prime osservazioni del Pianeta Olbers per determinarne l' orbita, uno ne vidi nel quale, per ritrovare la latitudine eliocentrica, senza sapersi la distanza dal Sole, si assumeva ad ipotetico principio, che i movimenti retrogradi de' Pianeti superiori tra se vicini intorno alle opposizioni sieno in ragione inversa delle distanze dal Sole. In ciò leggere mi si destò nell'animo voglia di sapere quanto un tal principio fosse concorde alla verità, o quanto da essa si discostasse, e cercai se una formola generale vi era dei piccoli movimenti geocentrici de' Pianeti considerate, come sono, le loro orbite elittiche. Trovai, che il Frisi, dopo aver data nel Capo V della sua Cosmografia Prob. VI, la formola del piccolo moto angolare geocentrico nell' orbita circolare, procede nel Prob. X ad insegnare la correzione da farsi ai luoghi delle stazioni determinati per l' orbita circolare, onde aver quelli nella vera orbita elittica, ma ivi si arresta lasciando desiderare la generica formola dei movimenti geocentrici nelle elittiche orbite reali. In buon punto mi risovvenne della diretta soluzione che voi il primo, come scrive eziandio il Lalande n. 1190. della sua Astronomia, avete data del problema, di assegnare nelle orbite elittiche i luoghi delle stazioni, e non ebbi che a scorrere il vostro calcolo per accorgermi, che, camminando sulle vostre traccie, sciogliere si poteva quest' altro universale delle geocentriche apparenze.

Problema. Determinare in una orbita elittica a qualunque dato tempo il piccolo movimento geocentrico?

Risoluzione. Conservate tutte le denominazioni da voi usate che sono

S . . . . Angolo di commutazione
T . . . . Angolo di elongazione
R . . . . Distanza dal Sole alla Terra
r . . . . Distanza dal Sole al luogo del Pianeta nell'Eclittica
V' . . . . Longitudine vera del Sole
g . . . . Longitudine Geocentrica del Pianeta
u' . . . . Longitudine Eliocentrica di lui
V . . . . Anomalia vera del Sole
u . . . . Anomalia vera del Pianeta
M . . . . il moto medio del Sole in un istante
m . . . . il moto medio del Pianeta nell' istante stesso
1 . . . . il semiasse maggiore dell' orbita terrestre
B . . . . il semiasse minore di essa
E . . . . l' eccentricità della medesima
a . . . . il semiasse maggiore dell' orbita del Pianeta
b . . . . il semiasse minore della stessa
e . . . . l' eccentricità
r' . . . . il raggio vettore del Pianeta
l . . . . l' inclinazione della sua orbita
L . . . . la sua latitudine Eliocentrica
P . . . . il tempo periodico della terra
p . . . . il tempo periodico del Pianeta.

Servendomi con voi delle due formole di trigonometria rettilinea

1.ª $\cot.T = \frac{R}{r \operatorname{sen}.S} - \cot.S$ che si deduce da

$\operatorname{tang}.T = \frac{r \operatorname{sen}.S}{R - r \cos.S}$. Invertendo si porrà questa formola per 1ª, e la 1ª per 2.ª

2.ª $\operatorname{sen}.^2 T = \frac{r^2 \operatorname{sen}.^2 S}{R^2 + r^2 - 2r R \cos.S}$.

Delle due contenenti i paragoni delle longitudini

1.ª $T = g - V'$ . . . . . 2.ª $S = 180° - (u' - V')$

Delle quattro della teoria del moto elittico

1.^{a} $dv = \frac{MB}{R^2}$ . . . . . 2.^{a} $dR = -\frac{ME \operatorname{sen} V}{B}$

3.^{a} $du = \frac{mab}{r'^2}$ . . . . . 4.^{a} $dr' = -\frac{mae \operatorname{sen} u}{b}$

E delle tre di Trigonometria sferica

1.^{a} $(du) = du \frac{\cos. l}{\cos.^2 L}$ intendendo per (du) il moto du ridotto all' Ecclittica

2.^{a} $r'^2 \cos.^2 L = r^2$

3.^{a} $dr = -\frac{mae \operatorname{sen}. u \cos. L}{b} - \frac{mab \operatorname{sen}.^2 L \cot. \operatorname{arg}. \operatorname{lat}.}{r}$

Io non mi diparto da voi, se non che nel computare il piccolo moto in Longitudine geocentrica dg, che voi avendo per oggetto le stazioni avete posto $= 0$.

Pigliando pertanto da capo il calcolo con prendere il differenziale dell' equazione 1.^{a} di Trig. rettil. ho come voi.

$$(A) \ldots -\frac{dT}{\operatorname{sen}.^2 T} = \frac{r \operatorname{sen}. S dR - R \operatorname{sen}. S dr}{r^2 \operatorname{sen}.^2 S} - \left(\frac{rR \cos. S}{r^2} - 1\right) \frac{dS}{\operatorname{sen}.^2 S}.$$

Ma prendendo i differenziali delle due equazioni contenenenti i paragoni delle longitudini $T = g - V'$, $S = 180^o - (u' - V')$, i quali differenziali sono $dT = dg - dV'$, $dS = -du' + dV'$ con fare le sostituzioni in (A), tenendo conto di dg in vece di supporlo zero, ne viene

$$(B) \ldots -\frac{dg + dV'}{\operatorname{sen}.^2 T} = \frac{r \operatorname{sen}. S dR - R \operatorname{sen}. S dr}{r^2 \operatorname{sen}.^2 S} - \left(\frac{rR \cos. S}{r^2} - 1\right) \frac{dV' - du'}{\operatorname{sen}.^2 S}.$$

Ed in luogo di sen.^{2}T sostituendo il suo valore esibito dalla 2.^{a} delle formole di Trig. rettil. e facendo le convenienti riduzioni trovo

$$(C) \ldots dg = \frac{(R^2 - rR \cos. S) dV' - (r dR - R dr) \operatorname{sen}. S - (rR \cos. S - r^2) du'}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos. S}.$$

Potendosi ai piccoli movimenti in longitudine dV', du' computar uguali quelli in anomalia dV, du, se in luogo di dV' si sostituisca il valor di dV dato dalla 1.^{a} delle quattro equazioni del moto elittico, ed in luogo di du' il valore di (du) dato insieme dalla 3.^{a} formola del moto elittico, e dalla

1.ª di Trig. sferica; se inoltre si sostituiscano a dR, dr i valori loro esibiti dalla formola 2.ª del moto elittico, e dalla 3.ª di Trig. sferica, ed in fine ad r'^2 si sostituisca il suo valore dedotto dalla 2.ª delle tre formole di Trig. sferica, proviene

$$(D) \quad dg = \frac{1}{R^2+r^2-2Rr\cos.S}\Big[MB - \frac{MBr\cos.S}{R} + \frac{MrE}{B}\,\text{sen.V sen.S} - \frac{Rmae}{b}\,\text{sen.}u\,\text{sen.S cos.L} - \frac{Rmab}{r}\,\text{sen.S sen.}^2\text{L cot.arg.lat.} - \left(\frac{R}{r}\cos.S - 1\right)mab\cos.l\Big].$$

I moti medj M, m in un dato tempicello sono in ragione inversa dei periodi, ed i periodi P, p elevati al quadrato sono, per la legge Kepleriana, come i semi-assi maggiori a, 1 alzati al cubo, e quinci $M^2 : m^2 :: p^2 : P^2 :: a^3 : 1$, onde ricavasi $\frac{ma}{M} = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Per la qual cosa dividendo tutta l'equazione (D) per M, e nei termini, ne' quali risulta $\frac{ma}{M}$, ponendo in vece $\frac{1}{\sqrt{a}}$, risulta

$$(E) \quad \frac{dg}{M} = \frac{1}{R^2+r^2-2Rr\cos.S}\Big[B - \frac{Br\cos.S}{R} + \frac{rE}{B}\,\text{sen.V sen.S} - \frac{Re}{b\sqrt{a}}\,\text{sen.}u\,\text{sen.S cos.L} - \frac{Rb}{r\sqrt{a}}\,\text{sen.S.sen.}^2\text{L cot.arg.lat.} - \frac{b}{\sqrt{a}}\cos.l\left(\frac{R}{r}\cos.S - 1\right)\Big].$$

In questa equazione si può trascurare il termine contenente sen.^{2}L allorchè la latitudine è piccola, ed allora si avrà l'equazione

$$(E') \quad \frac{dg}{M} = \frac{1}{R^2+r^2-2Rr\cos.S}\Big[B - \frac{Br\cos.S}{R} + \frac{rE}{B}\,\text{sen.V sen.S} - \frac{Re}{b\sqrt{a}}\,\text{sen.}u\,\text{sen.S cos.L} - \frac{b}{\sqrt{a}}\cos.l\left(\frac{R}{r}\cos.S - 1\right)\Big].$$

Che se si ponga $dg = 0$ ne verrà

$$(F) \quad B - \frac{Br\cos.S}{R} + \frac{rE}{B}\,\text{sen.V sen.S} - \frac{Re}{b\sqrt{a}}\,\text{sen.}u\,\text{sen.S cos.L}$$

$$-\frac{b}{\sqrt{a}}\cos.l\left(\frac{R}{r}\cos.S-1\right)=0$$

che coincide con l' equazione vostra dei luoghi delle stazioni.

Dall' equazione (E) apparisce evidentemente, che stando alla realità delle orbite elittiche, i piccoli movimenti geocentrici in diversi Pianeti non sono certamente nella semplice ragione inversa delle distanze dal Sole. Vediamo se ciò possa almen essere nelle orbite circolari. In tal caso, essendo le eccentricità E, e, $= o$, B ed R $= 1$, b ed $r = a$, l' equazione (E) si restrigne in

$$(G)\quad \frac{dg}{M}=\frac{1-a\cos.S-\frac{1}{\sqrt{a}}\text{sen.S.sen.}^2\text{L cot.arg.lat.}-\frac{1}{\sqrt{a}}(\cos.S-a)\cos.l}{1+a^2-2a\cos.S}.$$

E nel caso di sen.^{2}L troppo piccolo

$$(G')\quad \frac{dg}{M}=\frac{1-a\cos.S+\frac{1}{\sqrt{a}}(a-\cos.S)\cos.l}{1+a^2-2a\cos.S}.$$

Supponiamo pure il Pianeta in opposizione o sì vicino ad essa che S si possa contar per nullo, e cos.S $= 1$, e si avrà

$$(G'')\quad \frac{dg}{M}=\frac{1-a+\frac{1}{\sqrt{a}}\cos.l(a-1)}{1+a^2-2a}=\frac{a-\cos.l\sqrt{a}}{a(1-a)}.$$

Dalla qual formola manifestamente si raccoglie, che dg non può mai essere in semplice ragione inversa della distanza del Pianeta dal Sole, e che è ben lungi dall' esserlo anche nel supposto di orbite circolari. Molto più poi in orbite elittiche, e tanto più quanto sono più eccentriche. E l' orbita appunto di Olbers è di una grande eccentricità, e non è delle piccole la eccentricità dell' orbita di Marte, che nel tentativo da principio accennato era il Pianeta di confronto.

Intorno alla formola (G') io osservo che $\frac{1-a\cos.S}{1+a^2-2a\cos.S}$ è $=\frac{\cos.T}{\sqrt{(1+a^2-2a\cos.S)}}$. Poichè dalla 1.^{a} delle due formole Trigonometriche si ha $\cos.T=\frac{1-a\cos.S}{a\,\text{sen.S}}\times\text{sen.T}$, e dalla 2.^{a}

$\text{sen}.T = \frac{a\,\text{sen}.S}{\sqrt{(1+a^2-2a\cos.S)}}$, onde $\cos.T = \frac{1-a\cos.S}{\sqrt{(1+a^2-2a\cos.S)}}$, e
$\frac{\cos.T}{\sqrt{(1+a^2-2a\cos.S)}} = \frac{1-a\cos.S}{1+a^2-2a\cos.S}$.

Se si dica P l' angolo al Pianeta, che unitamente ai due angoli T alla Terra, S al Sole, formano il triangolo avente per lati la distanza dal Sole alla Terra $=1$, la distanza dal Sole al Pianeta $=a$, e la distanza dalla Terra al Pianeta $=\sqrt{(1+a^2-2a\cos.S)}$, varranno per P similmente che per T le tre formole trigonometriche cangiando solo 1 in a ed a in 1, e quinci sarà $\cos.P = \frac{a-\cos.S}{\text{sen}.S} \times \text{sen}.P$, e
$\text{sen}.P = \frac{\text{sen}\,S}{\sqrt{(a^2+1-2a\cos.S)}}$, conseguentemente
$\cos.P = \frac{a-\cos.S}{\sqrt{(a^2+1-2a\cos.S)}}$, e $\frac{\cos.P}{\sqrt{(a^2+1-2a\cos.S)}} = \frac{a-\cos.S}{a^2+1-2a\cos.S}$.

Quinci la formola (G') si trasforma nella seguente

$$\text{(H)}\qquad \frac{dg}{M} = \frac{\cos.T + \frac{1}{\sqrt{a}}\cos.P\cos.l}{\sqrt{(1+a^2-2a\cos.S)}},$$

e rimettendo in luogo di $\frac{1}{\sqrt{a}}$ il suo valore $\frac{ma}{M}$, e chiamando TP la distanza dalla Terra al Pianeta espressa per il denominatore $\sqrt{(1+a^2-2a\cos.S)}$, si riduce ad

$$\text{(H')}\qquad dg = \frac{ma\cos.P\cos.l + M\cos.T}{TP}.$$

Il Frisi, nel Prob. VI sul principio citato, dà per valore generale di dg nell' orbita circolare

$$\text{(L)}\qquad dg = \frac{PG\cos.P \mp TD\cos.T}{TP},$$

intendendo per PG una lineetta rappresentante la velocità del Pianeta, e per TD un' altra rappresentante la velocità della Terra. Equivale a PG il prodotto ma dell'angoletto m descritto dal Pianeta nel raggio della sua orbita a, ed a TD il prodotto $M\times 1$ dell' angoletto M nel tempicello medesimo descritto dalla Terra nel rispettivo raggio dell' orbita sua 1.

La prima differenza che passa tra la formola del Frisi, e la mia (H') si è, che in quella del Frisi non trovasi considerata la inclinazione dell' orbita del Pianeta, o cos.l è supposto $= 1$ il che se potevasi in certo modo fare per i Pianeti sino allor conosciuti, non si può fare per Olbers. La seconda differenza si è, che nella formola del Frisi tra l' un termine e l' altro del numeratore vi è il doppio segno $\mp$, laddove nella mia non vi è che il segno di addizione $+$. Essendo un Pianeta superiore in opposizione, l'angolo alla Terra T riesce ottuso, e conseguentemente cos. T negativo, onde il $-$ di questo cos. negativo finisce in $+$. Pretende il Frisi che il segno $-$ vaglia per i Pianeti di quà dal Sole, valendo il $+$ per essi di là dal Sole. Ma rispetto primieramente ai Pianeti superiori io osservo che essendo un di loro di quà dal Sole cioè nei due quadranti intorno all' opposizione, l' angolo alla Terra T riesce ottuso, ed il suo coseno negativo, onde senz' altro nasce la sottrazione dei due termini, se fra essi vi sia il solo segno $+$ convertendosi per la qualità negativa che prende il cos.T in $-$, laddove se già fra i due termini si ponga per il caso $-$, dalla sottrazione di un negativo ne risulterà contro intenzione $+$, vale dire addizion dei due termini. E quanto poi ai Pianeti inferiori nei due quadranti intorno alla congiunzione inferiore osservo, che diventa ottuso l'angolo al pianeta P, è perciò negativo cos.P, onde di nuovo nasce nel numerator della formola la sottrazion dai due termini, e si apre luogo al valor negativo di dg, ossia al moto retrogrado nei convenienti siti.

È bene raccogliere sotto uno sguardo le variazioni degli angoli S, P, T e conseguentemente di cos.S, cos.P, cos.T. L' angolo S è ottuso, ed in conseguenza cos.S negativo pei due quadranti intorno alla congiunzione superiore di un Pianeta qualunque. All' opposto è acuto, ed il suo coseno positivo pei due quadranti intorno alla congiunzione di sotto di un Pianeta inferiore od intorno all' opposizione di un Pianeta superiore.

L' angolo P è acuto, e cos. P positivo pei due quadranti intorno alla congiunzione superiore di un qualunque Pianeta, e pei due intorno alla opposizione di un Pianeta superiore; ma si fa ottuso, ed il suo coseno negativo, pei due quadranti intorno alla congiunzione di sotto di un Pianeta inferiore.

L' angolo T è sempre acuto, e cos.T sempre perciò positivo per un Pianeta inferiore; ma per un superiore non è così che nei quadranti intorno alla congiunzione, divenendo l' angolo ottuso, ed il suo coseno negativo nei due intorno alla opposizione.

Giusta la prima regola, contemplando un Pianeta superiore nei due punti contrarj di congiunzione e di opposizione, facciasi pel 1.° caso cos. S $= -1$, pel 2.° cos. S $= 1$; e si segni per $\frac{dg}{M}$ il moto suo diretto nel 1.° caso, per $-\frac{dg'}{M}$ il moto retrogrado nel caso 2.°; suppongasi inoltre la inclinazione l sì piccola, che possasi computare cos.$l = 1$: dall' equazione (G') si ricava $dg : -dg' :: \frac{1+\frac{1}{\sqrt{a}}}{1+a} : \frac{1-\frac{1}{\sqrt{a}}}{1-a} :: \frac{\sqrt{a}+1}{1+a} : \frac{\sqrt{a}-1}{1-a}$. Similmente considerando un Pianeta inferiore nei punti delle due congiunzioni di sopra e di sotto, si trova

$$dg : -dg' :: \frac{1+\frac{1}{\sqrt{a}}}{1+a} : \frac{1-\frac{1}{\sqrt{a}}}{1-a} :: \frac{\sqrt{a}+1}{1+a} : \frac{\sqrt{a}-1}{1-a}.$$

Si deducono le medesime proporzioni della formola (H) con fare rispetto ad un Pianeta superiore.

Pel caso della congiunzione cos:S $= -1$, cos.P $= 1$, cos.T $= 1$

Pel caso della opposizione cos.S $= 1$, cos.P $= 1$, cos.T $= -1$.

Rispetto ad un Pianeta inferiore.

Per la congiunzione di sopra cos.S $= -1$, cos.P$=1$, cos. T $= 1$.

Per la congiunzione di sotto cos.S $= 1$, cos.P $= -1$, cos.T $= 1$.

Il Frisi tira le stesse proporzioni dalla sua formola (L),

ma intanto riescegli di ciò fare, in quanto che un secondo errore distrugge l'effetto dell' error primo, prendendo cos.P $=$ cos.T $=1$ ogni qualvolta il Sole, la Terra, il Pianeta si trovano nella medesima linea, *cum Sole Terra ac Planetis ad eamdem lineam rectam delatis sit* cos.SPT $=$ cos.STP $=1$, son le sue parole nel coroll. III, quando realmente ciò vale unicamente nel caso di trovarsi il Pianeta nella congiunzione superiore, non già pel caso di essere nella congiunzione inferiore o nella opposizione.

Se proseguendo a supporre l'orbita circolare, e nulla la inclinazione si faccia nella formola (G') $dg=0$, che è quanto supporre il Pianeta stazionario, risulterà

$1-a\cos.S+\frac{1}{\sqrt{a}}(a-\cos.S)=0$ e quindi per formola determinante i luoghi delle stazioni

$$(K) \qquad \cos.S=\frac{\sqrt{a}+a}{a\sqrt{a}+1}.$$

Se si ami di avere espressi i luoghi stessi delle stazioni per $\text{tang.T}=\frac{a\ \text{sen.S}}{1-a\cos.S}$, si troverà $a\,\text{sen.S.}=\frac{a\sqrt{(a^3+1-a-a^2)}}{a\sqrt{a}+1}=$ $\frac{a\sqrt{(1-a)(1-a^2)}}{a\sqrt{a}+1}$, ed $1-a\cos.S=\frac{1-a^2}{a\sqrt{a}+1}$; onde $\text{tang.T}=\frac{a}{\sqrt{(1+a)}}$.

Il Frisi nel Prob. VII dà $\text{tang.T}=\frac{\pm a}{\sqrt{(1+a)}}$; ma il doppio segno $\mp$ è inutile nel numeratore, avendo già $\frac{a}{\sqrt{(1+a)}}$ due valori pel doppio valore positivo e negativo del denominatore. Del resto fa di subito maraviglia come esso Frisi con la sua falsa formola di dg arrivi alla vera formola dei luoghi delle stazioni. Ma cessa presto la maraviglia osservando il secondo errore che egli commette a distruggimento del primo, con tirare dalla sua formola (L) pel caso di $dg=0$,

$\frac{PG}{TD}\cos.P=\cos.T$, quando tirar ne dovrebbe $\frac{PG}{TD}\cos.P=\pm\cos.T$.

Tanto dunque è vero, che il giugner a delle verità non

è sempre prova della esatta rettitudine del cammino, e della verità delle proposizioni intermedie, potendo accadere che siasi uscito di sentiero, e poi ritornato su di esso, e parlando fuor d' immagine, che con secondo errore siasi riparato al primo. Laonde si manifesta la necessità di star attento su d'ogni passo, e ben esaminare se sia giusto, o no.

INTORNO AL METODO GENERALE PROPOSTO DAL SIG. HOËNÉ WRONSKI ONDE RISOLVERE LE EQUAZIONI DI TUTTI I GRADI

MEMORIA

DEL SIGNOR PAOLO RUFFINI

Ricevuta li 20. *Marzo* 1816.

Il Ch. Sig. Hoëné Wronski in un suo Opuscolo portante il titolo *Résolution générale des Équations de tous les dégrés* dedicato alla Polonia, e stampato in Parigi nel 1812 espone un metodo, col mezzo del quale asserisce ottenersi la soluzione di tutte le Equazioni algebriche determinate, qualunque ne sia il grado. Il pensiere di fare cosa grata ai Geometri, comunicando loro lo scioglimento completo di un Problema così famoso ha fatto sì, che Egli non ha esposti nel suo Opuscolo che i risultati indeterminati e generali e la traccia del suo metodo, riserbandosi a renderne pubblica in seguito la Teorica. Le regole pratiche e i calcoli, che in esso propone, sono indicati con chiarezza, e si possono agevolmente eseguire rapporto alle Equazioni di 2.° e di 3.° grado; ma relativamente alle Equazioni di grado più alto, e specialmente a quelle che superano il grado quarto, sono essi a cagione della loro lunghezza e complicazione, e a cagione della grandezza dei coefficienti per riescire laboriosissimi, e capaci di stancare qualunque più paziente Calcolatore. Ciò non ostante se dall'esecuzione dell'enorme lavoro realmente si ottenesse infine lo scioglimento delle Equazioni generiche di 5.°, di 6.°, ec. grado, potremmo anche affrontare la somma fatica, sicuri di trovarne finalmente un compenso nel vedere per noi determinate quelle radici, che per tanto

tempo hanno inutilmente cercate i più grandi Geometri. Ma l' impossibilità già esattamente dimostrata di risolvere le Equazioni generiche di grado superiore al 4.° rendendoci certi, che qualunque metodo perciò immaginato è erroneo e qualunque fatica inutile; potremmo con ragione tralasciar di eseguire l' immenso calcolo del Sig. Wronski, e potremmo eziandio dispensarci con pieno diritto dall' effettuare alcun discorso, che ne dimostri la fallacia, allorquando alle Equazioni si voglia applicare di grado non inferiore al 5.° Ciò non ostante, siccome tale erroneità può agevolmente dimostrarsi con raziocinii assai semplici, e siccome per questa può la dimostrazione della menzionata impossibilità ricevere maggior lustro, ci accingiamo ad esporla.

1. Propostasi dall' Illustre Autore l' Equazione algebrica generale.

(I) $\quad 0 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{ec.} + A_m x^m$,

di cui chiama x_1, x_2, x_3, ec. x_m le radici, e nella quale suppone per semplicità maggiore il coefficiente $A_{m-1} = 0$, e l' altro $A_m = 1$, indica il metodo, onde determinare dipendentemente da certe supposizioni un' altra Equazione di grado $m-1$*esimo*, cioè la

(II) $\quad 0 = Y_0 + Y_1 \xi + Y_2 \xi^2 + Y_3 \xi^3 + \text{ec.} + Y_{m-2} \xi^{m-2} + Y_{m-1} \xi^{m-1}$,

i coefficienti Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, ec. Y_{m-1} della quale dimostra essere, come sono difatti, funzioni razionali dei coefficienti A_0, A_1, A_2, A_3, ec. A_m, e denomina ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 ec. ξ_{m-1} le sue radici: chiamate in seguito ρ_1, ρ_2, ρ_3. ec. ρ_m le m radici della Equazione $z^m - 1 = 0$, in modo che sia

$\rho_\mu = \cos.\frac{\mu\pi}{m} + \sqrt{-1} \times \text{sen.}\frac{\mu\pi}{m}$, e π esprima la circonferenza del circolo avente il raggio 1, conclude infine dover essere

$$x_1 = \rho_1 \sqrt[m]{\xi_1} + \rho_1^2 \sqrt[m]{\xi_2} + \rho_1^3 \sqrt[m]{\xi_3} + \text{ec.} + \rho_1^{m-1} \sqrt[m]{\xi_{m-1}},$$

$$x_2 = \rho_2 \sqrt[m]{\xi_1} + \rho_2^2 \sqrt[m]{\xi_2} + \rho_2^3 \sqrt[m]{\xi_3} + \text{ec.} + \rho_2^{m-1} \sqrt[m]{\xi_{m-1}},$$

$$\text{(III)} \qquad x_3 = \rho_3 \sqrt[m]{\xi_1} + \rho_3^2 \sqrt[m]{\xi_2} + \rho_3^3 \sqrt[m]{\xi_3} + \text{ec.} + \rho_3^{m-1} \sqrt[m]{\xi_{m-1}},$$

ec.

$$x_m = \rho_m \sqrt[m]{\xi_1} + \rho_m^2 \sqrt[m]{\xi_2} + \rho_m^3 \sqrt[m]{\xi_3} + \text{ec.} + \rho_m^{m-1} \sqrt[m]{\xi_{m-1}}.$$

2. Per riconoscere se questa conclusione sia giusta, e quindi se gli esposti nel (n.° prec.) possano essere i veri valori della x nella Equazione data (I); comincio dal riflettere, che in conseguenza della ipotesi fatta dall' Autore nel (n.° prec.) deve essere $\rho_n = \rho_1^n$, rappresentandosi con la n un numero intero qualunque. Difatti, posto $\mu = 1$, dalla $\rho_\mu = \cos.\frac{\mu\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\frac{\mu\pi}{m}$ abbiamo $\rho_1 = \cos.\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\frac{\pi}{m}$, e posto $\mu = n$, abbiamo $\rho_n = \cos.\frac{n\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\frac{n\pi}{m}$; ma dalle proprietà delle quantità circolari si sa essere $\left(\cos.\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen.}\frac{\pi}{m}\right)^n = \cos.\frac{n\pi}{m} + \sqrt{-1} \times \text{sen.}\frac{n\pi}{m}$. Dunque ec.

Suppongasi successivamente $n = 1, 2, 3$, ec. m; risultando da ciò $\rho_1 = \rho_1$, $\rho_2 = \rho_1^2$, $\rho_3 = \rho_1^3$, ec., $\rho_m = \rho_1^m = 1$; ne segue, che come le ρ_1, ρ_2, ρ_3, ec. ρ_m tutte rappresentano le m radici della $z^m - 1 = 0$, così le radici medesime verranno rappresentate dalle $\rho_1, \rho_1^2, \rho_1^3$, ec. $\rho_1^m = 1$, ossia posto per semplicità ρ invece della ρ_1, dalle $\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4$, ec., $\rho^m = 1$.

Si faccia $\sqrt[m]{\xi} = u$, e si sostituisca nelle precedenti Equazioni (III); cangiatesi esse perciò nelle

$$x_1 = \rho u_1 + \rho^2 u_2 + \rho^3 u_3 + \text{ec.} + \rho^{m-1} u_{m-1},$$

$$x_2 = \rho^2 u_1 + \rho^4 u_2 + \rho^6 u_3 + \text{ec.} + \rho^{2(m-1)} u_{m-1},$$
$$x_3 = \rho^3 u_1 + \rho^6 u_2 + \rho^9 u_3 + \text{ec.} + \rho^{3(m-1)} u_{m-1}$$
ec.
$$x_m = u_1 + u_2 + u_3 + \text{ec.} + u_{m-1},$$

si moltiplichi la prima di loro per ρ^{m-1}, la seconda per ρ^{m-2}, la terza per ρ^{m-3}, ec. e la penultima per ρ; si sommino insieme le Equazioni, che ne risultano unitamente all'ultima $x_m = u_1 + u_2 + u_3 + \text{ec.}\, u_{m-1}$, e ne verrà evidentemente

$$m u_1 = \rho^{m-1} x_1 + \rho^{m-2} x_2 + \rho^{m-3} x_3 + \text{ec.} + \rho x_{m-1} + x_m,$$

e però

$$\text{(IV)}\quad \xi_1 = \frac{1}{m^m}\left(\rho^{m-1} x_1 + \rho^{m-2} x_2 + \rho^{m-3} x_3 + \text{ec.} + \rho x_{m-1} + x_m\right)^m.$$

Determinato così qual funzione delle x_1, x_2, x_3, ec. x_m sia la ξ_1, veggiamo, quanti valori diversi può essa ξ_1, che per semplicità dirò ξ, acquistare per tutte le permutazioni fra le x_1, x_2, x_3, ec. x_m.

3. Cominciamo perciò dal portare nella funzione

$$\rho^{m-1} x_1 + \rho^{m-2} x_2 + \rho^{m-3} x_3 + \text{ec.} + \rho x_{m-1} + x_m$$

la radice esistente nell'ultimo termine al termine primo, quella del termine primo nel secondo, quella del secondo nel terzo, e così di seguito; e ottenuto per tal modo il risultato

$$\rho^{m-1} x_m + \rho^{m-2} x_1 + \rho^{m-3} x_2 + \text{ec.} + \rho x_{m-2} + x_{m-1},$$

io dico che le potenze *mesime* di queste due funzioni sono uguali fra loro.

Supposto difatti chiamarsi la prima di esse t_1, e la seconda t_2; è chiaro risultare $\rho t_2 = t_1$ e quindi $\rho^m t^m_2 = t^m_1$; ma a cagione di $\rho^m = 1$ si ha $\rho^m t^m_2 = t^m_2$. Dunque sarà ancora $t^m_1 = t^m_2$.

4. Replicando successivamente quanto si può la permutazione supposta nel (n.° prec.) avremo evidentemente dalla funzione ivi indicata gli m seguenti risultati

$$\rho^{m-1}x_1 + \rho^{m-2}x_2 + \rho^{m-3}x_3 + \text{ec.} + \rho x_{m-1} + x_m,$$

$$\rho^{m-1}x_m + \rho^{m-2}x_1 + \rho^{m-3}x_2 + \text{ec.} + \rho x_{m-2} + x_{m-1},$$

$$\rho^{m-1}x_{m-1} + \rho^{m-2}x_m + \rho^{m-3}x_1 + \text{ec.} + \rho x_{m-3} + x_{m-2},$$

ec.

$$\rho^{m-1}x_2 + \rho^{m-2}x_3 + \rho^{m-3}x_4 + \text{ec.} + \rho x_m + x_1,$$

i quali denomino rispettivamente t_1, t_2, t_3, ec. t_m. Ciò fatto col ripetere quel medesimo discorso, mediante il quale nel (n.° prec.) si è provato essere $t^m_1 = t^m_2$, si dimostrerà ancora essere $t^m_2 = t^m_3$, $t^m_3 = t^m_4$, ec. $t^m_{m-1} = t^m_m$. Dunque le potenze *mesime* di tutte le m funzioni ora determinate sono uguali fra loro.

5. Eseguendo nella funzione (IV) tutte le possibili permutazioni fra le x_1, x_2, x_3, ec. x_m, i risultati che se ne ottengono, sappiamo essere di numero $1.2.3\ldots(m-1)m$. Ma in conseguenza della permutazione supposta nel (n. 3) dalla stessa funzione si ottengono m risultati uguali fra loro (n. 4), e tale uguaglianza succede qualunque sia il valore particolare delle x_1, x_2, x_3, ec. x_m. Dunque tutti gli accennati $1.2.3\ldots(m-1)m$ risultati dovendo perciò essere tra loro uguali ad m ad m, i valori che dalla funzione (IV) provengono differenti fra loro sotto tutte le possibili permutazioni non potranno tutt'al più che essere in numero di

$$\frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{m} = 1.2.3\ldots(m-1).$$

6. Aggiungo, che i risultati, i quali sotto tutte le permutazioni fra le x_1, x_2, x_3 ec. x_m, provenendo dalla funzione (IV), divengono disuguali fra di loro, sono necessariamente di numero $1.2.3\ldots(m-1)$.

Difatti, lasciata nella funzione (IV) la x_m costantemente nell'ultimo luogo, supposto quindi $\rho^{m-1}x_1 + \rho^{m-2}x_2 + \rho^{m-3}x_3 +$ ec. $+ \rho x_{(m-1)} = X$, onde si abbia $\xi = \frac{1}{m^m}(X + x_m)$, e supposto che eseguita tra alcune o tutte le $m-1$ radici x_1, x_2, x_3, ec. x_{m-1} una qualche permutazione, la X divenga X_1, vogliasi, se è possibile, che si abbia $\frac{1}{m^m}(X_1 + x_m)^m = \frac{1}{m^m}(X + x_m)^m = \xi$. Per la supposizione ora fatta, e per l'altra di $u^m = \xi$ (n.°2) avendosi tanto $\frac{1}{m^m}(X + x_m)^m$, quanto $\frac{1}{m^m}(X_1 + x_m)^m = u^m$, sarà valore della u sì la quantità $\frac{1}{m}(X + x_m)$, come l'altra $\frac{1}{m}(X_1 + x_m)$; ma per la necessaria disuguaglianza fra tutti i valori ρ, ρ^2, ρ^3, ec. ρ^{m-1}, e per la generalità della Equazione data (I) (n.° 1), e quindi per la indeterminazione delle x_1, x_2, x_3, ec. la X è necessariamente disuguale dalla X_1 e però la $\frac{1}{m}(X + x_m)$ disuguale dalla $\frac{1}{m}(X_1 + x_m)$: dunque queste due quantità non potranno che essere due radici dell'Equazione $u^m = \xi$ disuguali fra di loro. Ora, chiamate u_1, u_2 tali due radici, osservo che per la natura delle radici dell'unità, il valore u_2 deriva sempre dall'altro u_1 mentre venga questo secondo moltiplicato per una radice *mesima* dell'unità presa opportunamente, e diversa dall'unità medesima: dunque, chiamata μ simile radice, dovrà essere $u_2 = \mu u_1$ e però $\frac{1}{m}(X_1 + x_m) = \frac{\mu}{m}(X + x_m)$; ma quest'ultima Equazione deve verificarsi, qualunque siansi i valori delle x_1, x_2, x_3, ec., perchè l'Equazione data (I) è generica: dunque dovendo verificar i indipendentemente

dai valori medesimi, dovranno in essa i termini omogenei eguagliarsi fra loro, e avremo però $x_m = \mu x_m$, e quindi $1 = \mu$; ma ciò è impossibile, perchè μ è valore necessariamente diverso dall' unità: dunque sarà ancora impossibile, che si abbia $\frac{1}{m}(X + x_m) = \frac{\mu}{m}(X_1 + x_m)$, e però che la ξ non cambi sempre di valore sotto qualunque permutazione si voglia eseguire tra le x_1, x_2, x_3, ec. x_{m-1}. Ora queste radici sono di numero $m-1$, e tutte le permutazioni fra $m-1$ quantità sono di numero $1.2.3\ldots(m-1)$. Dunque la ξ sotto le varie permutazioni tra le x_1, x_2, x_3, ec. acquisterà necessariamente $1.2.3\ldots(m-1)$ valori disuguali fra loro; ma pel dimostrato nel (n.° prec.) non ne può acquistare un numero maggiore. Dunque ec.

7. Suppongasi $1.2.3\ldots(m-1) = \zeta$, e si chiamino ξ_1, ξ_2, ξ_3 ec. ξ_ζ tutti gli ζ valori della ξ, che pel (n.° prec.) sono necessariamente fra loro disuguali. Sapendosi da' principj noti nella Teorica delle Equazioni, potersi sempre trovare un' Equazione, le cui radici siano le precedenti ξ_1, ξ_2, ξ_3, ec. ξ_ζ, e i coefficienti della quale siano tante funzioni razionali dei coefficienti A_0, A_1, A_2, ec. della data (I), supponghiamo determinata attualmente simile Equazione, e tale sia la

(V) $\quad 0 = T_0 + T_1\xi + T_2\xi^2 + T_3\xi^3 + \text{ec.} + \xi^\zeta$.

8. L'Equazione (V) ora trovata non può avere alcun fattore, i coefficienti del quale siano tutti funzioni razionali de' coefficienti A_0, A_1, A_2, ec. della (I).

Concedasi per un momento l' esistenza di questo fattore, e supposto rappresentarsi pel polinomio

(VI) $\quad R_0 + R_1\xi + R_2\xi^2 + \text{ec.} + \xi^r$,

osservo che dovrà essere l' esponente $r < \zeta$, e chiamate ξ_1, ξ_2, ξ_3, ec. ξ_r quelle tra le radici della (V), che in esso si

contengono, ciascuno de' coefficienti R_0, R_1, R_2, ec. dovrà essere funzione delle medesime, onde espresso per $R_k\xi^k$ uno qualunque de' termini del fattore (VI), porrò in generale $R_k = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \text{ec. } \xi_r)$. Ciò posto, si prenda uno degli ζ valori della ξ (n.° prec.) che sono differenti dai precedenti ξ_1, ξ_2, ξ_3, ec. ξ_r, il che può sempre farsi essendo $r < \zeta$; e denominato ξ_{r+1}, si osservi per quali tra le radici x_1, x_2, x_3, ec. x_m permutate fra loro dal risultato ξ_1 ottienesi l' altro ξ_{r+1}. Determinate per questa osservazione tali radici, si permutino esse medesime in simile maniera ancora nel risultato secondo ξ_2, nel terzo ξ_3, e così di seguito fino allo *resimo* ξ_r, e chiamati i risultati che ne vengono in corrispondenza, ξ_{r+2}, ξ_{r+3}, ξ_{r+4}, ec., ξ_{2r}, si formi il prodotto dei binomj $\xi_{r+1} - \xi$, $\xi_{r+2} - \xi$, $\xi_{r+3} - \xi$, ec., $\xi_{2r} - \xi$, e si rappresenti per

(VII) $S_0 + S_1\xi^1 + S_2\xi^2 + S_3\xi^3 + \text{ec.} + \xi^r$.

Denominato $S_k\xi^k$ il termine, che in questo corrisponde al termine $R_k\xi^k$ del fattore (VI), è chiaro, che in conseguenza delle supposizioni fatte dovrà essere $S_k = f(\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \xi_{r+3} \text{ec. } \xi_{2r})$; ma ciascuna delle ξ_{r+1} ξ_{r+2}, ξ_{r+3}, ec. ξ_{2r} deriva da ciascheduna delle rispettive ξ_1, ξ_2, ξ_3, ec. ξ_r per la permutazione fra le medesime tra le x_1, x_2, x_3; ec. dunque ancora tutta la S_k deriverà da tutta la R_k per una permutazione tra le accennate fra le radici x_1, x_2, x_3, ec. x_m. Ora dovendo per la ipotesi essere R_k funzione razionale de' coefficienti A_0, A_1, A, ec.; qualunque permutazione si faccia

fra tutte, o alcune delle x_1, x_2, x_3, ec. x_m, essa R_k non cambia mai di valore; dunque non dovendolo cangiare neppure sotto la permutazione testè accennata, ne segue che dovrà risultare $S_k = R_k$. Il discorso fatto presentemente si verifica qualunque sia l' indice k: dunqne col fare successivamente $k = 0, 1, 2, 3$, ec. r, risultando $S_0 = R_0$, $S_1 = R_1$, $S_2 = R_2$, $S_3 = R_3$, ec. $S_r = R_r = 1$; ne segue che i due polinomj (VI), (VII) sono identici fra di loro, e quindi formatene le due Equazioni

$$R_0 + R_1 \xi + R_2 \xi^2 + R_3 \xi^3 + \text{ec.} + \xi^r = 0,$$

$$S_0 + S_1 \xi + S_2 \xi^2 + S_3 \xi^3 + \text{ec.} + \xi^r = 0,$$

le radici di questa dovranno uguagliare rispettivamente le radici di quella; ma ξ_{r+1} è per la ipotesi una delle radici della seconda Equazione, e ξ_1, ξ_2, ξ_3 ec. ξ_r sono tutte le radici della prima. Dunque ξ_{r+1} dovrà necessariamente uguagliare uno dei valori ξ_1, ξ_2, ξ_3, ec. ξ_r; ma ciò risultando contro la supposizione, non può essere; dunque non potrà neppure essere che il secondo membro della Equazione (V) abbia un fattore (VI), i coefficienti del quale siano funzioni razionali dei coefficienti della Equazione data (I).

9. Allorchè sia $m > 3$, il valore (IV) non può essere giammai radice dell' Equazione (II).

Nella ipotesi ora fatta di $m > 3$ risultando $\zeta > m - 1$ (n.° 7), non potrà l' Equazione (II) essere identica con la (V). Aggiungo non potere neppur essere, che il secondo membro di quella sia divisore esatto del secondo membro di questa, nè che questi due secondi membri abbiano un esatto comun divisore funzione della ξ: perchè se o l' uno o l' altro di tali casi avesse luogo; allora, essendo i coefficienti della (II) funzioni razionali dei coefficienti della (I) (n.° 1), il secondo membro della (V) avrebbe un fattore esatto,

i coefficienti del quale sarebbero funzioni razionali de' coefficienti della (I), il che non può essere (n.° prec.). Dunque il valore (IV) essendo radice della (V) (n.° 7), non potrà esser tale della (II); perchè se lo fosse, i secondi membri di queste due Equazioni sarebbero amendue divisibili esattamente almeno per $\xi_1 - \xi$, il che è contro ciò, che si è dimostrato presentemente.

10. Suppongasi m numero primo. In questo caso le funzioni ξ_1, ξ_2, ξ_3, ec. ξ_{m-1} (n.° 1) non essendo che tanti risultati, i quali provengono dal valore (IV) per tante permutazioni fra le x_1, x_2, x_3, ec. (n.° 2), saranno altrettante radici della (V); e niuna per conseguenza di esse pel dimostrato nel (n.° prec.) potrà nella ulteriore ipotesi di $m > 3$ essere radice della Equazione (II).

11. Sia m numero composto. In questa supposizione non tutte le funzioni ξ_1, ξ_2, ξ_3, ec. provengono dal solo valore (IV) in conseguenza di semplici permutazioni fra le x_1, x_2, x_3, ec.

Abbiasi per esempio $m = 4$. Essendo in questa ipotesi $\rho_1 = \sqrt{-1}$, $\rho_2 = -1$, $\rho_3 = -\sqrt{-1}$, $\rho_4 = 1$, ne verrà pel (n.° 2).

$$\xi_1 = \frac{1}{4^4}\left(-x_1\sqrt{-1} - x_2 + x_3\sqrt{-1} + x_4\right)^4,$$

$$\xi_2 = \frac{1}{4^4}\left(-x_1 + x_2 - x_3 + x_4\right)^4,$$

$$\xi_3 = \frac{1}{4^4}\left(-x_3\sqrt{-1} - x_2 + x_1\sqrt{-1} + x_4\right)^4,$$

e di questi risultati essendo il primo ξ_1 identico col (IV) mentre si faccia $m = 4$, il terzo ξ_3 proviene bensì da esso (IV) per la semplice permutazione delle x_1, x_3 fra di loro; ma il risultato secondo ξ_2 è una funzione affatto diversa dalla

ξ_1, e quindi non può derivarne per una semplice permutazione.

In questa supposizione di $m=4$ nè la ξ_1, nè la ξ_3 potranno pel (n.° prec.) essere radici della Equazione (II). Avuto però riguardo semplicemente al grado di essa (II), ed al non poter avere il suo secondo membro alcun fattore comune col secondo membro della (V) (n.° 9), potrebbe essere radice di essa (II) il valore ξ_2, perchè questo non può essere radice della (V), e di più per tutte le permutazioni fra le x_1, x_2, x_3, x_4 non può acquistare che tre valori fra loro diversi, cioè i tre

$$\text{(VIII)} \quad \frac{1}{4^4}\left(-x_1+x_2-x_3+x_4\right)^4, \quad \frac{1}{4^4}\left(-x_2+x_1-x_3+x_4\right)^4, \quad \frac{1}{4^4}\left(-x_4+x_2-x_3+x_1\right)^4.$$

Nel caso poi in cui ξ_2 fosse radice della Equazione (II) divenuta nel presente caso di grado terzo, il che nè asserisco nè nego, non avendone effettuato il calcolo; le radici di essa (II) sarebbero necessariamente le tre funzioni (VIII) ora determinate.

12. L'esposto metodo del Sig. Wronski potrà essere atto, come lo è realmente alla soluzione delle Equazioni di secondo, e di terzo grado, perchè in amendue questi casi risulta $\zeta=m-1$, e la Equazione (II) diviene identica con la (V).

Nella ipotesi di $m=4$ potrebbe la (II) pel (n.° prec.) avere per radici le tre funzioni (VIII), e se ciò fosse, l' indicato metodo somministrerebbe eziandio la soluzione delle Equazioni di 4.° grado; ma si avverta, che, se ciò accadesse, chiamate coll' illustre Autore ξ_1, ξ_2, ξ_3, (n.° 1) le tre radici di essa (II), e però le tre funzioni (VIII) (n.° prec.), i valori delle x_1, x_2, x_3, x_4 non uguaglierebbero già le funzioni di esse ξ_1, ξ_2, ξ_3, che propone il Sig. Wronscki (n.° 1), ma si avrebbe

$$x_1 = -\sqrt[4]{\xi_1} + \sqrt[4]{\xi_2}, + \sqrt[4]{\xi_3},$$

$$x_2 = \sqrt[4]{\xi_1} - \sqrt[4]{\xi_2} + \sqrt[4]{\xi_3},$$

$$x_3 = -\sqrt[4]{\xi_1} - \sqrt[4]{\xi_2} - \sqrt[4]{\xi_3},$$

$$x = \sqrt[4]{\xi_1} + \sqrt[4]{\xi_2} - \sqrt[4]{\xi_3}.$$

13. Nella ipotesi di $m > 4$ il metodo proposto dal Sig. Wronski, onde sciogliere le Equazioni generali, è fallace.

Quanto quivi asserisco era pruovato pienamente in conseguenza della impossibilità già dimostrata di risolvere le Equazioni generiche di grado superiore al 4.° : ciò non ostante potremo riconoscerne ancora la verità in conseguenza di quanto si è detto nei (n.^{i} prec.^{i}). Di fatti sia in primo luogo m numero primo > 4; la funzione (IV), onde aversi la soluzione della (I), dovrebbe in questo caso essere necessariamente radice della (II) (n.^{i} 1, 2), ma ciò pel (n.° 9) non può essere. Dunque nel caso di $m > 4$, e numero primo, il metodo presente è erroneo. Restando $m > 4$, sia esso numero composto; pel cit.° (n.° 9) non potrà neppure in questo caso la funzione (IV) essere, come vorrebbe l' Autore, radice della Equazione (II); pure potrebbe essa (II) contenere siccome radici i valori di un' altra funzione, i quali, come si è osservato relativamente alle Equazioni di 4.° grado (n.° prec.) avessero solamente $m - 1$ valori; ora il numero composto più piccolo maggiore del 4 è il 6: dunque se avesse mai luogo la nostra considerazione, il minimo grado della Equazione (II) sarebbe il 5°., ma simile Equazione di 5.° grado pel già detto non si può risolvere. Dunque ancora nel caso di $m > 4$, e numero composto, il metodo presente è incapace di somministrare la soluzione della data Equazione (I).

La fallacia finalmente di questo metodo deducesi ancora dal Teorema, che un' Equazione generale di grado m, essendo $m > 4$, se si vuole abbassare ad un' altra, che sia di un

grado minore di un numero p, essendo p un numero primo non $> m$; essa non potrà giammai abbassarsi, che ad un' Equazione di 1.°, oppure di 2.° grado: Teorema dimostrato da me da prima nel caso particolare di $p=5$, e dimostrato in seguito generalmente dal Ch. Sig. A. L. Couchy (*Journ. de l'École. Polytech. Cahier* 17.)

DELLA CLASSIFICAZIONE DELLE CURVE ALGEBRAICHE A SEMPLICE CURVATURA

OPUSCOLO

Del Signor Paolo Ruffini

Ricevuto li 14. *Settembre* 1816.

I sommi Geometri Eulero, e Cramer nel determinare contemporaneamente, e senzachè l'uno notizia avesse del lavoro dell' altro, la Teorica generale delle Curve algebraiche a semplice curvatura, vollero amendue stabilirne una classificazione. I principj, su de' quali Eglino perciò si appoggiarono, furono per entrambi i medesimi, ma non le medesime ne sono state per entrambi le deduzioni. Mentre Eulero stabilisce sedici generi di Curve algebraiche semplici di terzo ordine (*Introd. in Analys. Infinit. Cap.* 9.°), e cento quarantasei incirca d'ordine 4.° (Cap. 11.°); Cramer determina di quelle quattordici generi (*Introd. à l'Anal. des Lign. courb.* §. 155.) e rapporto a queste asserisce (§. 157.) sembrare, che sarebbe cosa infinita il volere col dettaglio medesimo, che ha servito per le Curve dell' ordine terzo, enumerarne tutti i generi. Questa discrepanza di risultati sembrandomi meritare la riflession de' Geometri, ho preso ad esame un simile argomento, e se non m' inganno altamente, lusingomi di avere non solo determinato, da che l' accennato disparere proceda, ma di avere inoltre con la determinazione di alcune proprietà rettificato il metodo di classificazione in guisa, che potremo applicare esso metodo alle Curve algebraiche di un grado qualunque, sicuri che non sarà giammai per accadere nè una falsa addizione, nè un' erronea trascuranza di Curve.

Dovendo servir di base a questa classificazione la varia natura dei Rami, che nelle Curve algebraiche scorrono all' infinito, e le diverse affezioni, delle quali esse Curve sono a distanza infinita dotate; e alla determinazione di tali proprietà e affezioni servendo alcune proprietà importantissime delle serie, nelle quali sviluppansi le Equazioni indeterminate, ho diviso tutto il lavoro in tre Memorie; e nella prima di queste esporrò le proprietà ora indicate delle serie; le affezioni delle Curve a distanza infinita formeranno il soggetto della Memoria 2.ª: e dalla Memoria terza infine dedotta pienamente dalle due precedenti apprenderemo, come eseguirsi possa la propostaci classificazione delle Curve, vedendone l' attuale applicazione alle Curve di 3.°, ed a quelle di grado 4.°

Alcune Proprietà generali delle Serie, nelle quali si sviluppano i valori di y, che dipendono da un' Equazione algebraica indeterminata a due variabili.

MEMORIA

Iª

1. Data un' Equazione algebraica indeterminata a due variabili, che rappresenterò in generale per la $f(x, y) = 0$, supponghasi, che nel suo primo membro non si contengano fattori i quali siano funzioni razionali delle x, y, giacchè se questi vi fossero, con le note regole si potrebbero sempre eliminare, e la serie, nella quale sviluppasi il valore di y espresso per x, sia in generale.

(I) $y = Lx^{\alpha} + Mx^{\beta} + Nx^{\gamma} + Px^{\delta} + Qx^{\varepsilon} + Rx^{\zeta} + \text{ec.} \ldots\ldots;$ supposto poi, che y', y'', y''', ec. esprimano i diversi valori, che aver deve la y, divenga la (I) in corrispondenza

$$\text{(II)}\quad\begin{aligned} y' &= L'x^{\alpha'} + M'x^{\beta'} + N'x^{\gamma'} + P'x^{\delta'} + Q'x^{\varepsilon'} + R'x^{\zeta'} + \text{ec.}\\ y'' &= L''x^{\alpha''} + M''x^{\beta''} + N''x^{\gamma''} + P''x^{\delta''} + Q''x^{\varepsilon''} + R''x^{\zeta''} + \text{ec.}\\ y''' &= L'''x^{\alpha'''} + M'''x^{\beta'''} + N'''x^{\gamma'''} + P'''x^{\delta'''} + Q'''x^{\varepsilon'''} + R''x^{\zeta'''} + \text{ec.}\\ &\text{ec.}\end{aligned}$$

Supponghiamo inoltre la (I) serie discendente, onde si abbia $\alpha > \beta > \gamma > \delta > \varepsilon > \zeta >$ ec. e posta l'Equazione $f(x,y) = 0$ di grado m, riducasi alla forma

$$\text{(III)}\quad\left\{\begin{array}{l} (ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + ex^{m-3} + gx^{m-4} + \text{ec.} + tx^2 + vx + u) +\\ (a'x^{m-1} + b'x^{m-2} + c'x^{m-3} + e'x^{m-4} + \text{ec.} + t'x + v')y +\\ (a''x^{m-2} + b''x^{m-3} + c''x^{m-4} + \text{ec.} + t'')y^2 +\\ (a'''x^{m-3} + b'''x^{m-4} + \text{ec.})y^3 +\\ (a^{\text{iv}}x^{m-4} + \text{ec.})y^4 +\\ \qquad\text{ec.} +\\ (a^{(m-1)}x + b^{(m-1)})y^{m-1} +\\ a^{(m)}y^m. \end{array}\right\} = 0$$

2. Nella (I) gli esponenti α, β, γ, δ, ec. sono sempre numeri razionali, ed i coefficienti L, M, N, P, ec. quantità algebraiche.

Potendo nella (III) i primi termini ax^m, bx^{m-1}, ec; $a'x^{m-1}y$, $b'x^{m-2}y$, ec.; $a''x^{m-2}y^2$, $b''x^{m-3}y^2$, ec.; ec. mancare; supponghiamo, che i primi termini, i quali attualmente sussistono alla sinistra nelle righe rispettivamente prima, seconda, terza, ec., $(n+1)$*esima*, $(n'+1)$*esima*, $(n''+1)$*esima* ec., della (III) siano in generale i seguenti

$$\text{(IV)}\quad hx^{m-q},\ h'x^{m-q'}y,\ h''x^{m-q''}y^2, \text{ec.}, h^{(n)}x^{m-q^{(n)}}y^n,\ h^{(n')}x^{m-q^{(n')}}y^{n'},$$

$h^{(n'')}x^{m-q^{(n'')}}y^{n''}$, ec. Ora si attribuisca alla x un valore infinito: la (I) diverrà perciò $y = Lx^{\alpha}$, e la (III) si cangerà nella $hx^{m-q} + h'x^{m-q'}y + h''x^{m-q''}y^2 + \text{ec.} + h^{(n)}x^{m-q^{(n)}}y^n + h^{(n')}x^{m-q^{(n')}}y^{n'} + h^{(n'')}x^{m-q^{(n'')}}y^{(n'')} + \text{ec.} = 0$,

e posto in questa Lx^a in luogo di y, avremo

(V) $hx^{m-q} + h'Lx^{m+a-q'} + h''L^2x^{m+2a-q''} + \text{ec.} + h^{(n)}L^n x^{m+na-q^{(n)}}$
$+ h^{(n')}L^{n'}x^{m+n'a-q^{(n')}} + h^{(n'')}L^{n''}x^{m+n''a-q^{(n'')}} + \text{ec.} = 0$.

Ma per essere x infinita, anche in quest' ultima Equazione deggiono conservarsi solamente quei termini, nei quali l' esponente della x è massimo, e inoltre di tali termini, che sono dotati di esponente massimo, esister ne deggiono nella (V) più di uno; perchè altrimenti, se si volesse per esempio il solo esponente $m+na-q^{(n)}$ maggiore degli altri tutti; scomparendo allora per la natura dell' infinito nella (V) tutti gli altri termini rapporto al solo $h^{(n)}L^n x^{m+na-q^{(n)}}$, essa (V) diverrebbe $h^{(n)}L^n x^{m+na-q^{(n)}} = 0$, e avrebbesi quindi un' Equazione assurda, poichè per la ipotesi la x è di valore infinito, ed i coefficienti $h^{(n)}$, L sono diversi dallo zero. Dunque dovendo nella (V) contenersi più termini, che siano forniti sulla x di esponente massimo, supporremo tali essere i termini
$h^{(n)}L^n x^{m+na-q^{(n)}}$, $h^{(n')}L^{n'}x^{m+n'a-q^{(n')}}$, $h^{(n'')}L^{n''}x^{m+n''a-q^{(n'')}}$,
ec: ma questa supposizione che tanto l'esponente $m+na-q^{(n)}$, quanto l'altro $m+n'a-q^{(n')}$, quanto il terzo $m+n''a-q^{(n'')}$, sia massimo, porta necessariamente, che si abbia
$m+na-q^{(n)} = m+n'a-q^{(n')} = m+n''a-q^{(n'')} = \text{ec.}$,
e a cagione di $x = \infty$ porta, che l' Equazione (V) divenga
$(h^{(n)}L^n + h^{(n')}L^{n'} + h^{(n'')}L^{n''} + \text{ec.})x^{m+na-q^{(n)}} = 0$, ossia
$h^{(n)}L^n + h^{(n)}L^{n'} + h^{(n'')}L^{n''} + \text{ec.} = 0$.

Dunque per essere i numeri m, n, $q^{(n)}$, n', $q^{(n')}$, n'', $q^{(n'')}$, ec., $h^{(n)}$, $h^{(n')}$, $h^{(n'')}$, ec. tutti razionali, come apparisce dalla

Equazione (III), e dai termini (IV), e per essere nelle ottenute Equazioni in α, essa α sempre al primo grado, dovrà il suo valore, che si ritrae $= \frac{q^{(n)} - q^{(n')}}{n - n'} = \frac{q^{(n)} - q^{(n'')}}{n - n''} =$ ec. essere razionale, e dovrà il rispettivo valore di L, che si ricava dall' ultima Equazione in L, essere algebraico.

Supposto, che siano già determinati questi valori di α, e di L, e chiamati essi α', L', si collochino nella (I) e fatto

$Mx^{\beta} + Nx^{\gamma} + Px^{\delta} + Qx^{\varepsilon} + Rx^{\zeta} +$ ec. $= y_1$,

onde la (I) diventa $y = L'x^{\alpha'} + y_1$, si sostituisca nella (III) ossia nella $f(x,y) = 0$ (n.° 1) $L'x^{\alpha'} + y_1$ in vece di y, e tale Equazione divenga perciò $f'(x, y_1) = 0$. Risultando i coefficienti di questa $f'(x, y_1) = 0$ tante funzioni razionali di L', ed essendo le Equazioni $y_1 = Mx^{\beta} +$ ec., $f'(x, y_1) = 0$ formate similmente alle altre $y = Lx^{\alpha} +$ ec., $f(x, y) = 0$, potremo applicare a quelle lo stesso discorso, che abbiamo precedentemente applicato a queste, e ricavandone quindi le conseguenze medesime, si troverà che anche β ha valore razionale, e che M è funzione algebrica di L'; ma L' pel dimostrato è già quantità algebraica, dunque tale sarà ancora il valore di M.

Nella maniera medesima si determina essere γ numero razionale, ed essere N funzione algebraica dei rispettivi valori di L, e di M, onde è quantità algebraica; e così in progresso. Dunque ec.

3. Suppongasi, che nella (III) nè il coefficiente a, nè l'altro $a^{(m)}$ sia zero. In questa ipotesi io dico, che nella corrispondente serie (I) dovrà essere l'esponente $\alpha = 1$.

Ritenute le prime supposizioni del (n.° 2), la serie dei termini (IV) in questo caso diverrà

ax^{m}, $h'x^{m-q'}y$, $h''x^{m-q''}y^{2}$, ec., $h^{(n)}x^{m-q^{(n)}}y^{n}$, ec., $a^{(m)}y^{m}$,

trascurati avendosi i termini $h^{(n')} x^{m-q^{(n')}} y^{n'}, h^{(n'')} x^{m-q^{(n'')}} y^{n''}$ perchè non necessarj; e in corrispondenza l' Equazione (V) diventerà

$$\text{(VI)}\quad ax^m + h'Lx^{m+\alpha-q'} + h''L^2x^{m+2\alpha-q''} + \text{ec.} + h^{(n)} L^n x^{m+n\alpha-q^{(n)}} + \text{ec.}$$

$+ a^{(m)} L^m x^{m\alpha} = 0$, dove e per le ipotesi fatte, e per la forma dell' Equazione (III), deve essere, 1.° tanto a, quanto $a^{(m)}$ diverso dallo zero; 2.° la x di valore infinito; 3.° q' non < 1, q'' non < 2, e in generale $q^{(n)}$ non $< n$; 4.° finalmente ciascuno dei coefficienti di α nei termini intermedi ai due ax^m, $a^{(m)} L^m x^{m\alpha}$ deve essere > 0, e $< m$.

Supposto ora, che $h^{(n)} L^n x^{m+n\alpha-q^{(n)}}$ rappresenti uno qualunque di questi termini intermedj, attribuiscasi ad α un valore < 1, intendendo compresi tra i valori < 1 anche tutti i negativi; poichè da ciò risulta $n\alpha - q^{(n)} < 0$, ne verrà l'esponente $m + n\alpha - q^{(n)} < m$; ma risulta ancora $m\alpha < m$. Dunque allorchè si voglia $\alpha > 1$, la Equazione (VI) a cagione di $x = \infty$ diverrà $ax^m = 0$ dunque essendo questa un' Equazione assurda, non potrà il valore di α nella serie (I) essere < 1. Si dia in secondo luogo nella (VI) ad α un valore > 1. Dovendo essere $\frac{q^{(n)}}{n}$ non < 1, e però nel caso presente $\alpha - \frac{q^{(n)}}{n}$ non $> \alpha - 1$, a cagione di $n < m$, si avrà $n\left(\alpha - \frac{q^{(n)}}{n}\right) < m(\alpha - 1)$, e quindi $m + n\left(\alpha - \frac{q^{(n)}}{n}\right) < m + m(\alpha - 1)$, ossia $m + n\alpha - q^{(n)} < m\alpha$; ma si ha eziandio $m < m\alpha$. Dunque mentre si ponga $\alpha > 1$, la (VI) diverrà $a^{(m)} L^m x^{m\alpha} = 0$; e per conseguenza, risultando nuovamente un' Equazione assurda, concluderemo non poter neppure essere $\alpha > 1$. Facciasi finalmente $\alpha = 1$. In questa ipotesi, o si vuole che in uno qualsivoglia dei termini intermedj della (VI), per esempio

nello $h^{(n)} L^n x^{m+na-q^{(n)}}$ si abbia $q^{(n)} = n$, oppure che sia $q^{(n)} > n$; nel primo di questi casi risultando $m + na - q^{(n)} = m$, e nel secondo $m + na - q^{(n)} < m$, e di più la supposizione di $a = 1$ dando sempre $m = ma$, l'Equazione (VI) diverrà in corrispondenza nel caso secondo $\left(a + a^{(m)} L^m\right) x^m = 0$, e nel primo $\left(a + \text{ec.} + a^{(n)} L^n + \text{ec.} + a^{(m)} L^m\right) x^m = 0$, ossia $a + a^{(m)} L^m = 0$, $a + \text{ec.} + a^{(n)} L^n + \text{ec.} + a^{(m)} L^m = 0$: ma nè l'una nè l'altra di queste ottenute Equazioni è assurda. Dunque potrà benissimo a avere il valore 1; ma si è anche dimostrato, che non può esso a ottenere altro valore che questo. Dunque ec.

4. Posto nella (VI) il valore 1 in vece di a, se sia $q' = 1$, $q'' = 2$, $q''' = 3$, ec. $q^{(n)} = n$, ec. e però $h' = a'$, $h'' = a''$, $h''' = a'''$ ec. $h^{(n)} = a^{(n)}$, ec. (n.[i] 1, 2); divenendo in essa tutti i termini moltiplicati per x^m, con la divisione per questa quantità otterremo l'Equazione

$$\text{(VII)} \qquad a + a' L + a'' L^2 + a''' L^3 + \text{ec.} + a^{(n)} L^n + \text{ec.} + a^{(m)} L^m = 0.$$

Che se le lettere q', q'', q''', ec. $q^{(n)}$ ec. esprimano o tutte, o in parte dei valori diversi, e però maggiori degli accennati 1, 2, 3, ec. n, ec.; allora i termini della (VI) rispettivi contenendo potenze della x minori della *massima* (n.° prec.), per essere $x = \infty$, scompariranno, e quindi mancheranno nella (VII) i termini, che vi corrispondono. Questa mancanza di termini nella (VII) potendo sempre effettuarsi attualmente col porre lo zero in luogo di quelli tra i coefficienti a', a'', a''', ec. $a^{(n)}$, ec., che riguardano i termini mancanti; ne segue, che operando secondo questa osservazione, potremo sempre con la (VII) esprimere l'Equazione, che nella ipotesi dei coefficienti a, $a^{(m)}$ diversi dallo zero ci risulta in L.

5. Sotto questa supposizione di a, e di $a^{(m)}$ non $= 0$, pel

dimostrato nel (n.° 3), dovrà nelle Equazioni particolari (II) essere $a' = a'' = a''' =$ ec. $= 1$; e siccome dalla (VII) tutti si deggiono poter dedurre i valori della L, che corrispondono a tutti i diversi valori della y; ne segue, che tutte le radici di questa (VII) altro non saranno, che tutti i valori L', L'', L''', ec. $L^{(m)}$ nelle (II).

Riterremo in avvenire costantemente i valori di a, e di $a^{(m)}$ diversi dallo zero. Potendo poi i valori di L, che in questa supposizione (n.^{i} 3, 4) si determinano dall' Equazione (VII) essere tutti disuguali fra loro, e non essere tali, distingueremo questi due casi nei due Capi seguenti.

CAPO I.°

Del caso, nel quale i valori di L *nell' Equazione* (VII) *sono tutti disuguali fra loro.*

6. Supponghiamo i valori di L nella Equazione (VII) tutti disuguali fra loro. In questa ipotesi io dico, che nelle (II), e in generale nella serie (I) ciascuno degli esponenti α, β, γ, δ, ec. è numero intero, e che i valori di M sono determinabili dipendentemente dai corrispondenti di L per tante Equazioni di primo grado; in egual modo per tante Equazioni di primo grado si determinano i valori di N dai rispettivi di L, e di M, e così di seguito.

Essendo m il grado dell' Equazione (III) rapporto alla y, non più di m deggiono essere quelle funzioni della x, che esprimono i diversi valori della y medesima. Ma per l' ipotesi fatta, e pel (n.° 5) le serie (II) esprimenti gli accennati valori della y sono di numero m. Dunque ciascuna di esse dovrà, (prescindendo dalla variazione della x) avere un solo valore. Ciò posto, vogliasi, che per esempio nella prima $y' = L'x + M'x^{\beta} +$ ec. uno qualunque degli esponenti, per esempio l' esponente β', il quale pel (n.° 2) deve già essere

numero razionale, sia fratto, e sia $=\frac{p}{r}$, ove p, r siano numeri primi fra loro, ed $r > 1$. Ora il termine $M'x^{\frac{p}{r}} = M'\sqrt[r]{x^p}$ per la natura dei radicali ha r valori diversi: dunque altrettanti, indipendentemente dalla x, ne dovrà avere ancora la serie $L'x + M'x^{\frac{p}{r}} +$ ec.; ma come abbiamo poc' anzi osservato, ciò non può essere. Dunque non potrà neppure essere, che alcuno degli esponenti α, β, γ, ec. sia numero rotto.

Pel discorso eseguito nel (n.° 2) sappiamo potersi sempre ottenere tante Equazioni algebraiche, col mezzo delle quali da quelli di L possono sempre ottenersi i corrispondenti valori di M. Ora se una qualsivoglia di queste Equazioni, quella per esempio, per cui da L' deducesi il valore M', si voglia rapporto all' incognita M di grado r, essendo $r > 1$, di numero r risultando i valori di M', anche la serie $L'x + M'x^{\beta'} +$ ec. avrà indipendentemente dalla x, un numero r di valori; ma ciò nuovamente non può essere. Dunque neppure potrà essere, che i valori di M non possano venir determinati dai rispettivi di L con tante Equazioni di grado primo. A norma dell' enunciato del Teorema lo stesso in egual modo si dimostra dei valori di N, di quelli di P, ec.

7. In conseguenza di quanto si è dimostrato sin quì, vedesi che nel caso nostro potrà sempre la (I) ridursi alla

$$\text{(III)} \quad y = Lx + Mx^0 + Nx^{-1} \quad Px^{-2} + Qx^{-3} + Rx^{-4} + \text{ec.},$$

e le (II) alle

$$\text{(X)} \quad \begin{aligned} y' &= L'x + M' + N'x^{-1} + P'x^{-2} + Q'x^{-3} + R'x^{-4} + \text{ec.}, \\ y'' &= L''x + M'' + N''x^{-1} + P''x^{-2} + Q''x^{-3} + R''x^{-4} + \text{ec.}, \\ y''' &= L'''x + M''' + N'''x^{-1} + P'''x^{-2} + Q'''x^{-3} + R'''x^{-4} + \text{ec.}, \\ &\text{ec.} \\ y^{(m)} &= L^{(m)}x + M^{(m)} + N^{(m)}x^{-1} + P^{(m)}x^{-2} + Q^{(m)}x^{-3} + R^{(m)}x^{-4} + \text{ec.}, \end{aligned}$$

dove poi si pongano uguali allo zero i coefficienti di quei termini, che nei casi particolari potessero mancare.

Potrebbe forse qualcuno muovere quivi una difficoltà, dicendo, come mai può uno qualsivoglia dei coefficienti M, N, ec. farsi zero, se la dimostrazione del (n.° 2) esige, che ciascuno di essi sia diverso dallo zero? Per rispondere a questa difficoltà, fissiamo l'attenzione sopra uno di tali coefficienti, per esempio sopra M, e osserviamo, che questo M nella serie (VIII) non esprime già in generale la stessa cosa, che esprime nelle considerazioni del citato (n.° 2). Colà il termine Mx^{β} si considera necessariamente esistente, perchè si considera essere quello, che attualmente succede al primo Lx^{α}, qualunque ne sia il valore del rispettivo esponente β; quivi Mx^{0} è il termine, che contiene la potestà x^{0}. Ora se in un dato caso particolare questa x^{0} esiste realmente nella serie, allora avremo benissimo $Mx^{0} = Mx^{\beta}$, e quindi $\beta = 0$, ed M esprimerà in amendue i casi la cosa medesima; ma se nel caso particolare supposto che l'indicata x^{0} manchi, e la potenza, che attualmente succede al termine Lx sia per esempio la x^{-2}; allora avremo il termine $Px^{-2} = Mx^{\beta}$, e però $\beta = -2$, e il coefficiente M del cit.° (n.° 2) uguaglierà nella (VIII) il coefficiente P.

8. Supponghiamo di rappresentare con le espressioni ΣL, ΣM, ΣN, ec. le somme $L' + L'' + L''' + \text{ec.} + L^{(m)}$, $M' + M'' + M''' + \text{ec.} + M^{(m)}$, $N' + N'' + N''' + \text{ec.} + N^{(m)}$, ec.; con le espressioni ΣL_2, ΣM_2, ΣN_2, ec. le somme di tutti i prodotti a due a due, ossia di tutti gli ambi fra le L', L'', L''', ec. $L^{(m)}$; fra le M', M'', M''', ec. $M^{(m)}$, fra le N', N'', N''', ec., $N^{(m)}$; ec. con le altre ΣL_3, ΣM_3, ΣN_3, ec. le somme di tutti i prodotti a tre a tre, ossia di tutti i terni fra le lettere medesime; e così di seguito. Supponghiamo inoltre di esprimere con la $\Sigma L_n M$ la somma di tutti i prodotti, che nascono

moltiplicando M' con la somma dei prodotti ad n ad n fra le L'', L''', ec., $L^{(m)}$, moltiplicando M'' con la somma de' prodotti ad n ad n tra le L', L''', ec. $L^{(m)}$, moltiplicando M''' con la somma de' prodotti ad n ad n tra le L', L'', ec. $L^{(m)}$, e così in progresso. Somme simili fra le L e le N, fra le L e le P, fra le M e le N, fra le N e le P, ec. si esprimano con le rispettive $\Sigma L_n N$, $\Sigma L_n P$, $\Sigma M_n N$, $\Sigma N_n P$, ec. nelle quali tutte n può rappresentare uno qualunque de' termini 1, 2, 3, ec. Con l' espressione $\Sigma L_n M_p$ si rappresenti la somma di tutti i prodotti ad n ad n tra i valori di L combinati con la moltiplicazione con tutti i prodotti a p a p tra i valori di M in modo, che in niuno dei risultati entrino insieme L' ed M', oppure L'' ed M'', oppure ec. Se posto $m=4$, si voglia per esempio $n=2$, $p=2$, avremo

$$\Sigma L_2 M_2 = L'L''M'''M^{\prime v} + L'L'''M'M^{\prime v} + L'L^{\prime v}N''M''' + L''L'''M'M^{\prime v} + L''L^{\prime v}M'M''' + L'''L^{\prime v}M'M''.$$

Le espressioni $\Sigma L_n N_p$, $\Sigma L_n P_q$, $\Sigma M_n P_q$, ec. rappresenteranno somme simili. Finalmente con la espressione generale $\Sigma L_n M_p N_q P_r \ldots\ldots$ rappresenteremo la somma di tutti i prodotti ad n ad n dei valori di L combinati mediante la moltiplicazione con tutti i prodotti a p a p dei valori di M con tutti i prodotti a q a q dei valori di N con tutti i prodotti ad r ad r dei valori di R, ec. in maniera però, che in nessuno dei termini entrino due o più lettere, le quali abbiano lo stesso numero di apici.

Per rappresentare poi le somme

$$L'^n M'^p + L''^n M''^p + L'''^n M'''^p + \text{ec.} + L^{(m)n} M^{(m)p},$$

$$M'^p N'^q P'^r + M''^p N''^q P''^r + M'''^p N'''^q P'''^r + \text{ec.} + M^{(m)p} N^{(m)q} P^{(m)r},$$

e in generale

$$L'^n M'^p N'^q P'^r \ldots + L''^n M''^p N''^q P''^r \ldots + L'''^n M'''^p N'''^q P'''^r \ldots + L^{(m)n} M^{(m)n} N^{(m)n} P^{(m)n} \ldots$$

ci serviremo rispettivamente delle espressioni

$\sigma L^n P^p$, $\sigma M^p N^q P^r$, $\sigma L^n M^p N^q P^r$ ....

9. Dalla maniera di scrivere, che si è stabilita nel (n.° prec.) è facile a dedursi, dover essere

$$\Sigma LM = M'(\Sigma L - L') + M''(\Sigma L - L'') + \text{ec.} + M^{(m)}(\Sigma L - L^{(m)}),$$

e però

$$\Sigma LM = \Sigma M \times \Sigma L - \sigma LM;$$

$$\Sigma L_2 M = M'(\Sigma L_2 - L'(\Sigma L - L')) + M''(\Sigma L_2 - L''(\Sigma L - L'')) + \text{ec.} + M^{(m)}(\Sigma L_2 - L^{(m)}(\Sigma L - L^{(m)})),$$

e quindi

$$\Sigma L_2 M = \Sigma M \times \Sigma L_2 - \sigma LM \times \Sigma L + \sigma L^2 M;$$

$$\Sigma L_3 M = M'(\Sigma L_3 - L'(\Sigma L_2 - L'(\Sigma L - L'))) + M''(\Sigma L_3 - L''(\Sigma L_2 - L''(\Sigma L - L''))) + \text{ec.} + M^{(m)}(\Sigma L_3 - L^{(m)}(\Sigma L_2 - L^{(m)}(\Sigma L - L^{(m)}))),$$

e per conseguenza

$$\Sigma L_3 M = \Sigma M \times \Sigma L_3 - \sigma LM \times \Sigma L_2 + \sigma L^2 M \times \Sigma L - \sigma L^3 M;$$

in generale

$$\Sigma L_n M = M'(\Sigma L_n - L'(\Sigma L_{n-1} - L'(\Sigma L_{n-2} - L'(\Sigma L_{n-3} - L'(\Sigma L_{n-4} \ldots \ldots - L'(\Sigma L - L'))))) \ldots) + \text{ec.}$$

e per conseguenza

$$\Sigma L_n M = \Sigma M \times \Sigma L_n - \sigma LM \times \Sigma L_{n-1} + \sigma L^2 M \times \Sigma L_{n-2} - \sigma L^3 M \times \Sigma L_{n-3} + \sigma L^4 M \times \Sigma L_{n-4} - \text{ec.} \mp \sigma L^{n-1} M \times \Sigma L \pm \sigma L^n M,$$

prendendosi il segno superiore quando n è pari, l' inferiore, quando n è dispari.

Così si ritrova

$$\Sigma L_n N = \Sigma N \times \Sigma L_n - \sigma LN \times \Sigma L_{n-1} + \sigma L^2 N \times \Sigma L_{n-2} - \text{ec.} \mp \sigma L^{n-1} N \times \Sigma L \pm \sigma L^n N;$$

$$\Sigma M_p N = \Sigma N \times \Sigma M_p - \sigma MN \times \Sigma M_{p-1} + \sigma M^2 N \times \Sigma M_{p-2} - \text{ec.} \mp \sigma M^{p-1} N \times \Sigma M \pm \sigma M^p N;$$

ec.

Avendosi poi $\Sigma M = \sigma M$ (n.° prec.) ed avendosi (n.° 4) dall' Equazione (VII) $\Sigma L = -\frac{a^{(m-1)}}{a^{(m)}}$, $\Sigma L_2 = \frac{a^{(m-2)}}{a^{(m)}}$, $\Sigma L_3 = -\frac{a^{(m-3)}}{a^{(m)}}$, ec. , $\Sigma L_{n-2} = \pm\frac{a^{(m-n+2)}}{a^{(m)}}$, $\Sigma L_{n-1} = \mp\frac{a^{(m-n+1)}}{a^{(m)}}$, $\Sigma L_n = \pm\frac{a^{(m-n)}}{a^{(m)}}$ col prendere il segno superiore, quando n è pari, e quando n è dispari, l'inferiore; sostituendo otterremo

$$\text{(X)}\quad \Sigma L_n M = \pm\frac{1}{a^{(m)}}\Big(a^{(m-n)}\sigma M + a^{(m-n+1)}\sigma LM + a^{(m-n+2)}\sigma L^2 M + a^{(m-n+3)}\sigma L^3 M + \text{ec.}$$
$$\ldots\ldots \quad + a^{(m-2)}\sigma L^{n-2} M + a^{(m-1)}\sigma L^{n-1} M + a^{(m)}\sigma L^n M\Big).$$

Potrebbero ricercarsi gli sviluppi ancora delle espressioni $\Sigma L_n M_p$, $\Sigma L_n M_p N_q$, ec.; ma oltrecchè risulterebbero questi troppo complicati, i soli precedentemente determinati sono a noi sufficienti per la dimostrazione di alcuni Teoremi troppo necessarj a conoscersi, per istabilire esattamente la classificazione delle Curve.

10. Si eseguisca la somma delle serie (IX), la somma de' loro prodotti a due a due, dei prodotti loro a tre a tre, a quattro a quattro, ec., ed avremo in corrispondenza i risultati

$$\Sigma y = x\Sigma L + \Sigma M + x^{-1}\Sigma N + x^{-2}\Sigma P + x^{-3}\Sigma Q + x^{-4}\Sigma R + \text{ec.},$$
$$\Sigma y_2 = x^2\Sigma L_2 + x\Sigma LM + \Sigma(LN + M_2) + x^{-1}\Sigma(LP + MN)$$
$$+ x^{-2}\Sigma(LQ + MP + N_2) + x^{-3}\Sigma(LR + MQ + NP) + \text{ec.},$$
$$\Sigma y_3 = x^3\Sigma L_3 + x^2\Sigma L_2 M + x\Sigma(L_2 N + LM_2) + \Sigma(L_2 P + LMN + M_3) +$$
$$x^{-1}\Sigma(L_2 Q + LMP + M_2 N) + x^{-2}\Sigma(L_2 R + LMQ + M_2 P + MN_2) + \text{ec.},$$
$$\Sigma y_4 = x^4\Sigma L_4 + x^3\Sigma L_3 M + x^2\Sigma(L_3 N + L_2 M_2) + x\Sigma(L_3 P + L_2 MN + LM_3) +$$
$$\Sigma(L_3 Q + L_2 MP + LM_2 N + L_2 N_2 + M_4) + x^{-1}\Sigma(L_3 R + L_2 MQ +$$
$$LM_2 P + M_3 N) + \text{ec. ec.}.$$

Ma per la natura delle Equazioni dalla (III) (n.° 1) si ha

$$\Sigma y = -\left(\frac{a^{(m-1)}}{a^{(m)}}x + \frac{b^{(m-1)}}{a^{(m)}}\right),$$

$$\Sigma y_2 = \left(\frac{a^{(m-2)}}{a^{(m)}}x^2 + \frac{b^{(m-2)}}{a^{(m)}}x + \frac{c^{(m-2)}}{a^{(m)}}\right),$$

$$\Sigma y_3 = -\left(\frac{a^{(m-3)}}{a^{(m)}}x^3 + \frac{b^{(m-3)}}{a^{(m)}}x^2 + \frac{c^{(m-3)}}{a^{(m)}}x + \frac{e^{(m-3)}}{a^{(m)}}\right),$$

$$\Sigma y_4 = \left(\frac{a^{(m-4)}}{a^{(m)}}x^4 + \frac{b^{(m-4)}}{a^{(m)}}x^3 + \frac{c^{(m-4)}}{a^{(m)}}x^2 + \frac{e^{(m-4)}}{a^{(m)}}x + \frac{g^{(m-4)}}{a^{(m)}}\right).$$

ec.

Dunque i precedenti risultati, e queste ultime funzioni in x, esprimendo valori delle medesime quantità Σy, Σy_2, Σy_3, Σy_4, ec., si uguaglieranno rispettivamente fra loro, e paragonando per esempio i due valori di Σy_2, avremo

$$x^2\Sigma L_2 + x\Sigma LM + \Sigma(LN + M_2) + x^{-1}\Sigma(LP + MN) + x^{-2}\Sigma(LQ + MP + N_2) +$$
$$x^{-3}u(LR + MQ + NP) + \text{ec.} = \frac{a^{(m-2)}}{a^{(m)}}x^2 + \frac{b^{(m-2)}}{a^{(m)}}x + \frac{c^{(m-2)}}{a^{(m)}}.$$

Ora si renda in quest' ultima Equazione la x di valore infinito: diventando essa perciò $x^2\Sigma L_2 = \frac{a^{(m-2)}}{a^{(m)}}x^2$, risulterà $\Sigma L_2 = \frac{a^{(m-2)}}{a^{(m)}}$. Si tolgano dalla citata ultima Equazione i due termini $x^2\Sigma L_2$, $\frac{a^{(m-2)}}{a^{(n)}}x^2$; e per l' uguaglianza ora dimostrata di questi quella diverrà

$$x\Sigma LM + \Sigma(LN + M_2) + x^{-1}\Sigma(LP + MN) + x^{-2}\Sigma(LQ + MP + N_2) +$$
$$x^{-3}\Sigma(LR + MQ + NP) + \text{ec.} = \frac{b^{(m-2)}}{a^{(m)}} + \frac{c^{(m-2)}}{a^{(m)}}x.$$

Si faccia nuovamente x infinita; divenuta perciò questa ultima Equazione $x\Sigma LM = \frac{b^{(m-2)}}{a^{(m)}}x$, ci mostra dover' essere $\Sigma LM = \frac{b^{(m-2)}}{a^{(m)}}$, e cangiarsi quindi essa stessa nella

$\Sigma(LN+M_2)+x^{-1}\Sigma(LP+MN)+x^{-2}\Sigma(LQ+MP+N_2)+$

$$x^{-3}\Sigma(LR+MQ+NP)+\text{ec.}=\frac{c^{(m-2)}}{a^{(m)}}.$$

Con la solita supposizione di $x=\infty$, vedremo dedursi da quest' ultima $\Sigma(LN+M_2)=\frac{c^{(m-2)}}{a^{(m)}}$, e però

$x^{-1}\Sigma(LP+MN)+x^{-2}\Sigma(LQ+MP+N_2)+x^{-3}\Sigma(LR+MQ+NP)+$

$$\text{ec.}=0.$$

Proseguendo avanti nella maniera medesima, troveremo essere $\Sigma(LP+MN)=0$, e così $\Sigma(LQ+MP+N_2)=0$, $\Sigma(LR+MQ+NP)=0$, ec.

Il paragone medesimo, che si è ora eseguito tra i due valori di Σy_2, eseguendosi tra i due di Σy, di Σy_3, di Σy_4, ec., ci darà in egual modo tante Equazioni tra i loro coefficienti: e il confronto attuale ci mostrerà simili Equazioni essere le seguenti, le quali son distribuite in modo, che nella prima colonna verticale si contengono le provenute da Σy, nella colonna seconda le provenute da Σy_2, ec.

$$\Sigma L=-\frac{a^{(m-1)}}{a^{(m)}},\ \Sigma L_2=\frac{a^{(m-2)}}{a^{(m)}},\ \Sigma L_3=-\frac{a^{(m-3)}}{a^{(m)}},\ \Sigma L_4=\frac{a^{(m-4)}}{a^{(m)}},\ \text{ec.},$$

$$\Sigma M=-\frac{b^{(m-1)}}{a^{(m)}},\ \Sigma LM=\frac{b^{(m-2)}}{a^{(m)}},\ \Sigma L_2M=-\frac{b^{(m-3)}}{a^{(m)}},\ \Sigma L_3M=\frac{b^{(m-4)}}{a^{(m)}},\ \text{ec.},$$

$$\text{(XI)}\quad \Sigma N=0, \Sigma(LN+M_2)=\frac{c^{(m-2)}}{a^{(m)}},\ \Sigma(L_2N+LM_2)=-\frac{c^{(m-3)}}{a^{(m)}},\ \Sigma(L_3N+L_2M_2)=\frac{c^{(m-4)}}{a^{(m)}},\ \text{ec.},$$

$$\Sigma P=0,\ \Sigma(LP+MN)=0,\ \Sigma(L_2P+LMN+M_3)=-\frac{e^{(m-3)}}{a^{(m)}},\ \Sigma(L_3P+L_2MN+LM_3)=\frac{e^{(m-4)}}{a^{(m)}},\ \text{ec.},$$

$\Sigma Q=0,\ \Sigma(LQ+MP+N_2)=0, \Sigma(L_2Q+LMP+M_2N)=0,\ \Sigma(L_3Q+L_2MP$

$+ LM_2N + L_2N_2 + M_4) = \frac{g^{(m-4)}}{a^{(m)}}$, ec.,

$\Sigma R = o$, $\Sigma(LR + MQ + NP) = o$, $\Sigma(L_2R + LMQ + M_2P + MN_2) = o$,

$\Sigma(L_3R + L_2MQ + LM_2P + M_3N) = o$, ec..

ec.

11. Nelle Equazioni (XI) ora trovate osserviamo,

1.° Che nella prima linea orizzontale con le m quantità L', L'', L''', ec. $L^{(m)}$, e gli m coefficienti $\frac{a^{(m-1)}}{a^{(m)}}$, $\frac{a^{(m-2)}}{a^{(m)}}$, $\frac{a^{(m-3)}}{a^{(m)}}$, ec. $\frac{a}{a^{(m)}}$ abbiamo m Equazioni, quelle cioè, che esprimono i generali rapporti tra i coefficienti e le radici della Equazione (VII) (n.° 4).

2.° Nella linea seconda si hanno gli m valori di M tutti ad una sola dimensione, e moltiplicati nel modo accennato nel (n.° 8) con i valori di L. Questi valori poi di M si contengono in m Equazioni, i secondi membri delle quali sono formati dagli m coefficienti $b^{(m-1)}$, $b^{(m-2)}$, $b^{(m-3)}$, ec. b della (III) cangiati alternativamente di segno, e divisi tutti per $a^{(m)}$.

Essendo di numero m tanto i coefficienti $a^{(m-1)}$, $a^{(m-2)}$, $a^{(m-3)}$, ec. a, come gli altri $b^{(m-1)}$, $b^{(m-2)}$, $b^{(m-3)}$, ec. b, è facile a vedersi, che tanto i valori di L, come quelli di M non possono avere tra di loro alcun rapporto, il quale non sia dipendente dai valori dei coefficienti medesimi.

3.° Esistono nella linea terza in m Equazioni gli m valori di N alla prima potenza moltiplicati nel modo del (n.° 8) con i valori di L, e i secondi membri di tali Equazioni sono le quantità o, $\frac{c^{(m-2)}}{a^{(m)}}$, $-\frac{c^{(m-3)}}{a^{(m)}}$, ec. $\frac{c}{a^{(m)}}$; ma le $c^{(m-2)}$, $c^{(m-3)}$, ec. c sono coefficienti della (III), e sono in numero di $m - 1$. Dunque uno dei valori di N va soggetto ad un

rapporto particolare indipendente dai coefficienti della data Equazione (III); e tale difatti è quello, che dipende dall' Equazione $\Sigma N = o$.

4.° Contengonsi nella linea quarta ad una dimensione gli m valori di P moltiplicati (n.° 8) con i valori di L in m Equazioni; ma le quantità $\frac{e^{(m-3)}}{a^{(m)}}$, $\frac{e^{(m-4)}}{a^{(m)}}$, ec. $\frac{e}{a^{(m)}}$ esistenti nei secondi membri delle citate Equazioni sono di numero $m-2$, come apparisce dalla (III). Dunque rimangono due dei valori di P legati a relazioni particolari indipendenti dai valori dei coefficienti della (III); e tali sono quelli, che procedono dalle Equazioni $\Sigma P = o$, $\Sigma(LP + MN) = o$.

5.° Nello stesso modo si vede, che, mentre di numero m sono nella linea quinta tanto le Equazioni, quanto i valori di Q; il numero delle quantità $\frac{g^{(m-4)}}{a^{(m)}}$, ec. $\frac{g}{a^{(m)}}$ è $m-3$. Dunque tre dei valori di Q sono legati a rapporti particolari indipendenti dai coefficienti della (III); e questi sono i dipendenti dalle $\Sigma Q = o$, $\Sigma(LQ + MP + N_2) = o$, $\Sigma(L_2 Q + LMP + M_2 N) = o$.

6.° Così in progresso, trovandosi soggetti a rapporti particolari quattro valori di R, cinque di S, ec.

12. Proponendoci una quistione inversa alle considerate finora, supponghiamo, che vengano dati i valori dei coefficienti L', L", ec. M', M", ec. delle serie (IX), e che dipendentemente da questi vogliansi determinare i coefficienti della (III), supposto in essa per semplicità maggiore $a^{(m)} = 1$.

Le precedenti Equazioni (XI) è chiaro che sciolgono tosto il presente Problema.

Conviene però riguardo ad esso eseguire un' importante riflessione, ed è, che i valori di L, e quelli di M possono venir dati tutti ad arbitrio; ma quando essi siano dati, non sono più in egual modo arbitrarj tutti i valori di N, di P,

di Q ec. Difatti tanto nella prima, quanto nella seconda delle linee (XI) abbiamo m Equazioni con m incognite, cioè con le $a^{(m-1)}$, $a^{(m-2)}$, $a^{(m-3)}$, ec., a nella prima, e con le $b^{(m-1)}$, $b^{(m-2)}$, $b^{(m-3)}$, ec. b nella seconda: dunque tanto gli m valori di L, quanto gli m di M possono venire assegnati ad arbitrio. Ma nella linea terza le incognite $c^{(m-2)}$, $c^{(m-3)}$, $c^{(m-4)}$, ec., c sono di numero $m-1$; nella quarta le incognite $e^{(m-3)}$, $e^{(m-4)}$, ec., e sono di numero $m-2$; nella quinta le incognite $g^{(m-4)}$, ec. g sono di numero $m-3$; e così in progresso; e di più nella linea terza si ha l'Equazione $\Sigma N=0$ senza alcun' incognita; nella riga quarta abbiamo senza verun' incognita le due Equazioni $\Sigma P=0$, $\Sigma(LP+MN)=0$, nella riga quinta esistono senza incognita alcuna le tre $\Sigma Q=0$, $\Sigma(LQ+MP+N_2)=0$, $\Sigma(L_2Q+LMP+M_2N)=0$; nella linea sesta le quattro $\Sigma R=0$, $\Sigma(LR+MQ+NP)=0$, $\Sigma(L_2R+LMQ+M_2P+MN_2)=0$, $\Sigma(L_3R+L_2MQ+LM_2P+L_2N_2+M_3N)=0$, e così di seguito. Dunque mentre siano già dati gli m valori di L, e gli m di M; degli m valori di N non potrà darsene ad arbitrio che un numero $m-1$; così dati già questi, degli m di P non se ne potrà assegnare arbitrariamente, che un numero $m-2$: degli m di Q che un numero $m-3$, degli m di R che un numero $m-4$, ec.; mentre siano già stati assegnati i precedenti; e il valore nel caso nostro rimanente di N, i due che rimangono di P, i tre di Q, i quattro di R, ec. sono necessariamente determinati dalle Equazioni poc'anzi esposte, aventi nel secondo membro lo zero.

13. Per quanto si è detto nel fine del (n.° prec.) il numero dei valori di L, di M, di N, di P, ec., che possono darsi ad arbitrio, viene determinato dalla somma $m+m+(m-1)+(m-2)+\text{ec.}+3+2+1=\frac{m(m+1)}{2}+m=\frac{m(m+3)}{2}$, ma

di numero $\frac{m(m+3)}{2}$ sono ancora tutti i coefficienti della (III) essendosi posto il primo $a^{(m)} = 1$. Dunque l'attuale assegnamento degli accennati valori di L, di M, di N, ec. determinando tutti gli $\frac{m(m+3)}{2}$ coefficienti della (III), determina pienamente l'Equazione medesima.

Sia nella serie (VIII) V il coefficiente del termine $(m+1)$*esimo*, cioè del termine $Vx^{-(m-1)}$. Allorchè siano stati già dati i valori tutti dei coefficienti, che precedono V; questo V per quanto si è ora detto, non può avere, che un valor solo assegnabile arbitrariamente, e i coefficienti ulteriori U, Z, ec. dei termini Ux^{-m}, $Zx^{-(m+1)}$, ec. non hanno valore alcuno arbitrario, essendo essi tutti pienamente dipendenti dai valori dei coefficienti, che precedono, e da certi particolari rapporti fra di loro, rapporti i quali sono costanti in tutte le Equazioni dello stesso grado.

14. Potendo nelle serie (IX) alcuni, o tutti i valori N', N'', ec. P', P'', ec. essere zero (n.° 7); io dico, che se ciò accada, dovranno aver luogo le seguenti importantissime proprietà.

1.° Il numero dei valori attualmente esistenti di N, se si vuole diverso dallo zero, dovrà essere > 1.

2.° Posto che tutti i valori N', N'', ec. $N^{(m)}$ siano zero nelle (IX), o non esisterà valore alcuno di P, o ne esisterà un numero > 2.

3.° Mentre siano zero tutti i valori di N, e tutti quelli di P; i valori di Q o mancheranno anch'essi affatto, o saranno in un numero > 3.

4.° Allorchè i valori di N, di P, e di Q siano tutti zero; o saranno zero anche tutti i valori di R, o il numero loro supererà il 4.

5.° Così in progresso; onde se Tx^{-n} esprima un termine qualunque della (VIII) diverso dai due primi Lx, M,

e se i valori tutti di tutti i coefficienti N, P, Q, ec. S precedenti T siano zero; o mancheranno eziandio tutti i valori di questo T, o il numero loro sarà $> n$.

I. Cominciam dal supporre $N'' = o$, $N''' = o$, ec. $N^{(m)} = o$. In questa ipotesi risulterà $\Sigma N = N'$, ma dalle (XI) (n°. 10) si ha $\Sigma N = o$; dunque venendo nel caso nostro ad essere ancora $N' = o$, rimane dimostrato quanto nel (prec. 1.°) abbiamo asserito.

II. Siano tutti i valori di N zero, e sia $P''' = o$, $P^{IV} = o$, ec. $P^{(m)} = o$. Avendosi perciò $\Sigma MN = o$, e dalle (XI) (n.° 10) avendosi $\Sigma P = o$, $\Sigma(LP + MN) = o$; quest'ultima Equazione diverrà
$\Sigma LP = o$, e pel (n.° 9) otterremo $\Sigma LP = \Sigma P \times \Sigma L - \sigma LP = -\sigma LP = o$; ma la $\Sigma P = o$ in questo caso equivalente alla $P' + P'' = o$ ci somministra $P'' = -P'$, onde si ha $\sigma LP = L'P' + L''P''$, (n.° 8) $= P'(L' - L'') = o$. Dunque per la disuguaglianza già esistente fra tutti i valori L', L'', ec. $L^{(m)}$ (n.° 6) dovrà essere $P' = o$, ed essendo perciò anche $P'' = -P' = o$; verrà così dimostrata la proposizione del (prec. 2.°).

III. Uguaglinsi allo zero tutti i valori di N, tutti quelli di P, e sia $Q^{IV} = o$, $Q^{V} = o$, ec. $Q^{(m)} = o$. In questa supposizione divenendo $\Sigma MP = o$, $\Sigma N_2 = o$, $\Sigma LMP = o$, $\Sigma M_2 N = o$, le prime tre Equazioni della linea quinta nelle (XI) si cangeranno nelle $\Sigma Q = o$, $\Sigma LQ = o$, $\Sigma L_2 Q = o$, e però pel (n.° 9) avremo
$\Sigma Q = o$, $\Sigma LQ = -\sigma LQ = o$; $\Sigma L^2 Q = \sigma L^2 Q = o$, ossia
$Q' + Q'' + Q''' = o, L'Q' + L''Q'' + L'''Q''' = o, L'^2 Q' + L''^2 Q'' + L'''^2 Q''' = o$.
Ricavo dalla prima di queste Equazioni il valore $Q''' = -(Q' + Q'')$, e lo sostituisco nelle altre. Risultando da ciò

$Q'(L' - L''') + Q''(L'' - L''') = o$,

$Q'(L'^2 - L'''^2) + Q''(L''^2 - L'''^2) = Q'(L' - L''')(L' + L''') + Q''(L'' - L''')(L' + L''') = o$

ovvero, posto per semplicità $L' - L''' = A'$, $L'' - L''' = B$, $A'Q' + A''Q'' = o$,

$A'Q'(L' + L''') + A''Q''(L'' + L''') = o$, elimino la quantità $A''Q''$; e

poichè si ottiene $A'Q'(L'-L'')=0$, ossia, fatto $L'-L''=B'$, $A'B'Q'=0$, osservo, che dovrà essere $Q'=0$, perchè tali pel (n.° 6) non possono divenire nè A', nè B'. Questa conseguenza producendoci le due Equazioni $Q''+Q'''=0$, $L''Q''+L'''Q'''=0$ il discorso del (prec. II) ci dimostrerà dover essere eziandio $Q''=0$, $Q'''=0$, e quindi restar provata la proposizione del (prec. 3°).

IV. Siano zero tutti i valori di N, di P, di Q, ed i valori R^v, ec. $R^{(m)}$. Le prime quattro Equazioni della riga sesta nelle (XI) (n.° 10), diverranno perciò
$\Sigma R=0$, $\Sigma LR=0$, $\Sigma L_2 R=0$, $\Sigma L_3 R=0$, e pel (n.° 9) avremo

$$R'+R''+R'''+R'^v=0,\ L'R'+L''R''+L'''R'''+L'^v R'^v=0,$$
$$L'^2R'+L''^2R''+L'''^2R'''+L'^{v2}R'^v=0,\ L'^3R'+L''^3R''+L'''^3R'''+L'^{v3}R'^v=0.$$

Si sostituisca il valore di R'^v ricavato dalla prima di queste Equazioni nelle altre tre, e risultando

$$R'(L'-L'^v)+R''(L''-L'^v)+R'''(L'''-L'^v)=0,$$
$$R'(L'^2-L'^{v2})+R''(L''^2-L'^{v2})+R'''(L'''^2-L'^{v2})=0,$$
$$R'(L'^3-L'^{v3})+R''(L''^3-L'^{v3})+R'''(L'''^3-L'^{v3})=0,$$

col porre $L'-L'^v=A'$, $L''-L'^v=A''$, $L'''-L'^v=A'''$, avremo

$$A'R'+A''R''+A'''R'''=0,$$
$$A'R'(L'+L'^v)+A''R''(L''+L'^v)+A'''R'''(L'''+L'^v)=0$$
$$A'R'(L'^2+L'L'^v+L'^{v2})+A''R''(L''^2+L''L'^v+L'^{v2})+A'''R'''(L'''^2+L'''L'^v+L'^{v2})=0.$$

Si elimini da queste tre Equazioni il termine $A'''R'''$ ricavato dalla prima; poichè quindi si ottiene

$$A'R'(L'-L''')+A''R''(L''-L''')=0,$$
$$A'R'(L'^2-L'''^2)+A''R''(L''^2-L'''^2)+(A'R'(L'-L''')+A''R''(L''-L'''))L'^v=0,$$

ossia, posto $L'-L'''=B'$, $L''-L'''=B''$, ottiensi

$$A'B'R'+A''B''R''=0,\ A'B'R'(L'+L''')+A''B''R''(L''+L''')=0,$$

e finalmente, eliminato il termine $A''B''R''$, e fatto $L'-L''=C'$, poichè si ricava $A'B'C'R'=0$, dovrà pel (n.° 6) essere $R'=0$; e avendosi perciò dalle Equazioni di sopra le altre $R''+R'''+R'^v=0$, $L''R''+L'''R'''+L'^vR'^v=0$, $L''^2R''+L'''^2R'''+L'^{v2}R'^v=0$, pel dimostrato nel (prec. III) ne verrà $R''=0$, $R'''=0$, $R^v=0$. Dunque essendo ancora $R'=0$, ne segue, che ec.

V. In generale si suppongano zero i valori tutti di tutti

i coefficienti N, P, Q, ec. S, ed insieme i valori $T^{(n+1)}$, $T^{(n+2)}$, ec. $T^{(m)}$. Avendosi da ciò

$\Sigma T=0$, $\Sigma LT=0$, $\Sigma L_2 T=0$, $\Sigma L_3 T=0$, $\Sigma L_4 T=0$, ec. $\Sigma L_{n-1} T=0$

(n.° 10), e quindi per la ipotesi di $T^{(n+1)}=0$, ec. $T^{(m)}=0$, e pel (n.° 9) essendo

(XII) $$T'+\text{ec.}+T^{(n)}=0,\ L'T'+\text{ec.}+L^{(n)}T^{(n)}=0,\ L'^2T'+\text{ec.}+L^{(n)2}T^{(n)}=0,$$
$$L'^3T'+\text{ec.}+L^{(n)3}T^{(n)}=0,\ \text{ec.}\ L'^{n-1}T+\text{ec.}+L^{(n)n-1}T^{(n)}=0,$$

con eliminare $T^{(n)}$ ricaveremo

$$T'(L'-L^{(n)})+\text{ec.}+T^{(n-1)}(L^{(n-1)}-L^{(n)})=0,$$
$$T'(L'^2-L^{(n)2})+\text{ec.}+T^{(n-1)2}(L^{(n-1)2}-L^{(n)2})=0.$$
$$T'(L'^3-L^{(n)3})+\text{ec.}+T^{(n-1)}(L^{(n-1)3}-L^{(n)3})=0,$$
$$\text{ec.}$$
$$T'(L'^{n-1}-L^{(n)n-1})+\text{ec.}+T^{(n-1)}(L^{(n-1)n-1}-L^{(n)n-1})=0,$$

ossia, posto $L'-L^{(n)}=A'$, $L''-L^{(n)}=A''$, ec., $L^{(n-1)}-L^{(n)}=A^{(n-1)}$, otterremo

$$A'T'+\text{ec.}+A^{(n-1)}T^{(n-1)}=0,$$
$$A'T'(L'+L^{(n)})+\text{ec.}+A^{(n-1)}T^{(n-1)}(L^{(n-1)}+L^{(n)})=0,$$
$$A'T'(L'^2+L'L^{(n)}+L^{(n)2})+\text{ec.}+A^{(n-1)}T^{(n-1)}(L^{(n-1)2}+L^{(n-1)}L^{(n)}+L^{(n)2})=,$$
(XIII) $$A'T'(L'^3+L'^2L^{(n)}+L'L^{(n)2}+L^{(n)3})+\text{ec.}+A^{(n-1)}T^{(n-1)}(L^{(n-1)3}+L^{(n-1)2}L^{(n)}+L^{(n-1)}L^{(n)2}+L^{(n)3})=0,\ \text{ec.},$$
$$A'T'(L'^{n-2}+L'^{n-3}L^{(n)}+L'^{n-4}L^{(n)2}+\text{ec.}+L'L^{(n)n-3}+L^{(n)n-2})+\text{ec.}+$$
$$A^{(n-1)}T^{(n-1)}(L^{(n-1)n-2}+L^{(n-1)n-3}L^{(n)}+L^{(n-1)n-4}L^{(n)2}+\text{ec.}+L^{(n-1)}L^{(n)n-3}+L^{(n)n-2})=$$

Si elimini il termine $A^{(n-1)}T^{(n-1)}$, e si faccia $L'-L^{(n-1)}=B'$, $L''-L^{(n-1)}=B''$, ec. $L^{(n-2)}-L^{(n-1)}=B^{(n-2)}$; ne verrà

$$A'B'T'+\text{ec.}+A^{(n-2)}B^{(n-2)}T^{(n-2)}=0,$$

$A'L T' (L' + L^{(n-1)}) + ec. + A^{(n-2)} B^{(n-2)} T^{(n-2)} (L^{(n-2)} + L^{(n-1)}) +$
$(A'B'T' + ec. + A^{(n-2)} B^{(n-2)} T^{(n-2)}) L^{(n)} = 0,$

$A'B'T'(L'^2 + L'L^{(n-1)} + L^{(n-1)2}) + ec. + A^{(n-2)} B^{(n-2)} T^{(n-2)} (L^{(n-2)2}$
$+ L^{(n-2)} L^{(n-1)} + L^{(n-1)2}) +$
$(A'B'T'(L' + L^{(n-1)}) + ec. + A^{(n-2)} B^{(n-2)} T^{(n-2)} (L^{(n-2)} + L^{(n-1)})) L^{(n)} +$
$(A'B'T' + ec. + A^{(n-2)} B^{(n-2)} T^{(n-2)}) L^{(n)2} = 0,$

ec.

$A'B'T'(L'^{n-3} + L'^{n-4} L^{(n-1)} + L'^{n-5} L^{(n-1)2} + ec. + L^{(n-1)n-3}) + ec. +$
$A^{(n-2)} B^{(n-2)} T^{(n-2)} (L^{(n-2)n-3} + L^{(n-2)n-4} L^{(n-1)} + L^{(n-2)n-5} L^{(n-1)2} +$
$ec. + L^{(n-1)n-3}) +$
$(A'B'T' (L'^{n-4} + L'^{n-5} L^{(n-1)} + ec. + L^{(n-1)n-4}) + ec. + A^{(n-2)} B^{(n-2)} T^{(n-2)}$
$(L^{(n-2)n-4} + L^{(n-2)n-5} L^{(n-1)} + ec. + L^{(n-1)n-4})) L^{(n)} +$
$(A'B'T'(L'^{n-5} + ec. + L^{(n-1)n-5}) + ec. + A^{(n-2)} B^{(n-2)} T^{(n-2)} (L^{(n-2)n-5} + ec. +$
$L^{(n-1)n-5})) L^{(n)2} + ec. + (A'B'T' + ec. + A^{(n-2)} B^{(n-2)} T^{(n-2)}) L^{(n)n-3} = 0,$

ossia, tolte tutte quelle parti, che a cagione delle Equazioni, che precedono, sono zero, avremo

$A'B'T' + ec. + A^{(n-2)} B^{(n-2)} T^{(n-2)} = 0,$

$A'B'T'(L' + L^{(n-1)}) + ec. + A^{(n-2)} B^{(n-2)} T^{(n-2)} (L^{(n-2)} + L^{(n-1)}) = 0,$

(XIV) $A'B'T'(L'^2 + L'L^{(n-1)} + L^{(n-1)2}) + ec. + A^{(n-2)} B^{(n-2)} T^{(n-2)} (L^{(n-2)2}$
$+ L^{(n-2)} L^{(n-1)} + L^{(n-1)2}) = 0,$

ec.

$A'B'T'(L'^{n-3} + L'^{n-4} L^{(n-1)} + L'^{n-5} L^{(n-1)2} + ec. + L^{(n-1)n-3}) + ec. +$
$A^{(n-2)} B^{(n-2)} T^{(n-2)} (L^{(n-2)n-3} + L^{(n-2)n-4} L^{(n-1)} + L^{(n-2)n-5} L^{(n-1)2}$
$+ ec. + L^{(n-1)n-3}) = 0.$

Ora queste ultime Equazioni (XIV) sono perfettamente simili alle precedenti (XIII). Dunque eliminando il termine

$A^{(n-2)}B^{(n-2)}T^{(n-2)}$, supponendo $L'-L^{(n-2)}=C'$, $L''-L^{(n-2)}=C''$, ec., $L^{(n-3)}-L^{(n-2)}=C^{(n-3)}$, ed eseguendo dei calcoli affatto somiglianti a quelli, per mezzo dei quali dalle (XIII) sonosi ottenute le Equazioni (XIV), ci risulteranno le altre

$$
(XV)\quad \begin{array}{l}
A'B'C'T' + \text{ec.} + A^{(n-3)}B^{(n-3)}C^{(n-3)}T^{(n-3)} = 0, \\
A'B'C'T'(L'+L^{(n-2)})+\text{ec.}+A^{(n-3)}B^{(n-3)}C^{(n-3)}T^{(n-3)}(L^{(n-3)}+L^{(n-2)})=0, \\
\text{ec.} \\
A'B'C'T'(L'^{\,n-4}+L'^{\,n-5}L^{(n-2)}+L'^{\,n-6}L^{(n-2)2}+\text{ec.}+L^{(n-2)n-4}) + \text{ec.} + \\
A^{(n-3)}B^{(n-3)}C^{(n-3)}T^{(n-3)}(L^{(n-3)n-4}+L^{(n-3)n-5}L^{(n-2)}+L^{(n-3)n-6}L^{(n-2)}+ \\
\text{ec.} + L^{(n-2)n-4}) = 0.
\end{array}
$$

Col proseguire avanti nella maniera medesima, e col supporre $L'-L^{(n-3)}=D'$, ec. $L^{(n-4)}-L^{(n-3)}=D^{(n-4)}$, dalle (XV) si otterranno le

$$
(XVI)\quad \begin{array}{l}
A'B'C'D'T' + \text{ec.} + A^{(n-4)}B^{(n-4)}C^{(n-4)}D^{(n-4)}T^{(n-4)} = 0, \\
\text{ec.} \\
A'B'C'D'T'(L'^{\,n-5}+L'^{\,n-6}L^{(n-3)}+\text{ec.}+L^{(n-3)n-5}) + \text{ec.} + \\
A^{(n-4)}B^{(n-4)}C^{(n-4)}D^{(n-4)}T^{(n-4)}(L^{(n-4)n-5}+L^{(n-4)n-6}L^{(n-3)}+ \\
\text{ec.}+L^{(n-3)n-5})=0.
\end{array}
$$

Nell'ottenere successivamente le Equazioni (XII), (XIII), ec., (XVI) vedesi, che tanto il numero delle Equazioni, come quello delle quantità T', T'', ec. $T^{(n)}$ in esse contenute vanno continuamente diminuendosi di uno, risultando sempre le Equazioni ulteriori simili alle precedenti, ma dalle (XII) apparisce, che le T', T'', ec. $T^{(n)}$, sono tante precisamente, quante sono esse Equazioni (XII). Dunque proseguendo il solito calcolo finchè si può, e supposto in fine $L'-L'''=G'$, $L''-L'''=G''$, ed $L'-L''=H'$, in ultimo risulterà $A'B'C'D'\ldots G'H'T'=0$: ma niuno dei valori A', B', C', ec. H' pel (n.° 6) può essere zero; dunque dovrà essere tale T'. Ora

retrocedendo nelle ottenute Equazioni, e tenendo conto soltanto di quelle delle prime linee, dall'Equazione $A'B'C'D' \ldots G'H'T' = o$ si passa all' altra $A'B'C'D' \ldots\ldots G'T' + A''B''C''D'' \ldots\ldots G''T'' = o$, poscia alla terza $A'B'C'D' \ldots T' + A''B''C''D'' \ldots T'' + A'''B'''C'''D''' \ldots T''' = o$, e così di seguito fino alle prime $A'T' + A''T'' + A'''T''' + \text{ec.} + A^{(m-1)}\,T^{(m-1)} = o$, $T' + T'' + T''' + \text{ec.} + T^{(n-1)} + T^{(n)} = o$. Dunque in conseguenza di tutte queste Equazioni, e della ipotesi fatta nel (n.° 6) dovrà essere $T' = o$, $T'' = o$, $T''' = o$, ec. $T^{(n-1)} = o$, $T^{(n)} = o$; e però il presente Teorema risulta vero in tutta la generalità, come è stato accennato nel (prec. 5.°).

CAPO III.°

Del caso, nel quale alcune, o tutte le radici della Equazione (VII) *sono uguali fra loro.*

15. Si contengano nella (VII) n radici $= L'$, essendone tutte le altre disuguali. In questa ipotesi io dico, che corrispondentemente a questo valore L' la serie (I) dovrà, prescindendo dalla variazione della x, avere n valori diversi, nè più, nè meno.

Per dimostrare questo Teorema, suppongasi, che gli accennati valori della (I) corrispondenti ad L' siano di numero r qualunque siasi per essere il valore di questo r, e tali siano i seguenti

$$L'x + M_1 x^{6_1} + N_1 x^{\gamma_1} + \text{ec.},$$

$$L'x + M_2 x^{6_2} + N_2 x^{\gamma_2} + \text{ec.},$$

$$L'x + M_3 x^{6_3} + N_3 x^{\gamma_3} + \text{ec.},$$

ec.

$$L'x + M_{(r)} x^{6^{(r)}} + N_{(r)} x^{\gamma^{(r)}} + \text{ec.},$$

sottratta ciascuna di queste serie dalla y, si moltiplichino i risultati

$$y - L'x - M_1 x^{\beta_1} - \text{ec.},$$

$$y - L'x - M_2 x^{\beta_2} - \text{ec.},$$

$$y - L'x - M_3 x^{\beta_3} - \text{ec.},$$

ec.

$$y - L'x - M_{(r)} x^{\beta(r)} - \text{ec.}$$

fra di loro, e con gli altri tutti

$$y - L''x - M'' x^{\beta''} - \text{ec.},$$

$$y - L'''x - M''' x^{\beta'''} - \text{ec.},$$

ec.

$$y - L^{(m)} x - M^{(m)} x^{\beta'm)} - \text{ec.};$$

avremo quindi un prodotto, il quale a cagione di essere m il numero totale delle esposte serie, e di aversi pei (n.[i] 3, 1) $\alpha = 1 > \beta > \gamma >$ ec., sarà evidentemente
$y^m - (x\Sigma L + \text{ec.}) y^{m-1} + (x^2 \Sigma L_2 + \text{ec.}) y^{m-2} - (x^3 \Sigma L_3 + \text{ec.}) y^{m-3} +$ ec. dove ΣL, ΣL_2, ΣL_3, ec. esprimono la somma semplice, la somma degli ambi, dei terni, ec. delle quantità L'', L''', ec. $L^{(m)}$, e della L' ripetuta in esse somme le volte r. Ora l' ottenuto prodotto esser deve identico col primo membro della Equazione (III) diviso per $a^{(m)}$. Dunque dal paragone dei termini omologhi avendosi $\Sigma L = -\frac{a^{(m-1)}}{a^{(m)}}$, $\Sigma L_2 = \frac{a^{(m-2)}}{a^{(m)}}$, $\Sigma L_3 = -\frac{a^{(m-3)}}{a^{(m)}}$, ec. $\Sigma L_{(m)} = \pm \frac{a}{a^{(m)}}$ col prendere il segno + od il — secondochè m è numero pari o dispari; ne segue, che tutti i valori di L, i quali si contengono ne' precedenti risultati, che abbiamo moltiplicati insieme, sono precisamente tutte le radici della Equazione (VII), ma tra queste ultime

il valore L' per ipotesi si contiene le volte n, e tra i primi le volte r. Dunque risultando $r = n$; ne viene che ec.

16. Mentre pongasi $n = 1$, per quanto si è dimostrato nel (n.° prec.) risultando uno solo il valore della serie (I), che corrisponde al solo valore L'; ne segue, che il Teorema del (n.° 6) rapporto a questo L' è vero ancora nel caso, in cui due o più degli altri valori L'', L''', ec. fossero uguali fra loro.

17. Sia nel (n.° 15) $n > 1$, e siano

$$\text{(XVII)}\quad \begin{array}{l} L'x + M_1 x^{\beta_1} + N_1 x^{\gamma_1} + \text{ec.}, \\ L'x + M_2 x^{\beta_2} + N_2 x^{\gamma_2} + \text{ec.}, \\ L'x + M_3 x^{\beta_3} + N_3 x^{\gamma_3} + \text{ec.}, \\ \qquad \text{ec.} \\ L'x + M_{(n)} x^{\beta(n)} + N_{(n)} x^{\gamma(n)} + \text{ec.} \end{array}$$

i rispettivi n valori della serie (I). Ciò posto,

Cominciam dal supporre $\beta_1 = \frac{p}{n}$ (n.° 2) ove p, n siano numeri primi fra loro. Dovendo essere $\beta_1 < \alpha_1$, ed $\alpha_1 = 1$ (n.° 1, 3), ne verrà $p > n$, e chiamate 1, π', π'', ec. $\pi^{(n-1)}$ le n radici della Equazione $\pi^n = 1$, per le proprietà delle radici dell' unità saranno valori della (I) anche tutti i seguenti

$$\begin{array}{l} L'x + M_1 x^{\frac{p}{n}} + \text{ec.}, \\ L'x + M_1 \pi'^{p} x^{\frac{p}{n}} + \text{ec.}, \\ L'x + M_1 \pi''^{p} x^{\frac{p}{n}} + \text{ec.}, \\ \qquad \text{ec.} \\ L'x + M_1 \pi^{(n-1)p} x^{\frac{p}{n}} + \text{ec.}. \end{array}$$

Ma questi sono di numero n, e tutti fra loro diversi; perchè essendo p, n primi tra loro; vengono somministrate tutte le *mesime* radici dell' unità tanto dalle supposte 1, π', π'', ec. $\pi^{(n-1)}$, quanto dalle loro potenze 1, π'^{p}, π''^{p}, ec. Dunque essendo di numero n anche i precedenti (XVII) dovrà essere $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \text{ec.} = \beta_{(n)} = \frac{p}{n}$, e ciascuno dei coefficienti M_2, M_3, ec. $M_{(n)}$ dovrà uguagliarne uno dei $\pi'^{p}M_1$, $\pi''^{p}M_1$, ec. $\pi^{(n-1)p}M_1$, ossia per quanto si è ora detto uno dei $\pi'M_1$, $\pi''M_1$, ec. $\pi^{(n-1)}M_1$. Pertanto i coefficienti M_1, M_2, M_3, ec. $M_{(n)}$ saranno nel caso nostro necessariamente le radici di un' Equazione della forma $M^n = H$.

18. Sia in secondo luogo nelle (XVII) $\beta_1 = \frac{p}{k}$, supponendo quì ancora p, k numeri primi tra loro. Osserviamo tostamente non poter essere $k > n$, perchè se lo fosse la $L'x + M_1 x^{\frac{p}{k}} + \text{ec.}$ avendo un numero k di valori tra loro diversi, la serie (I) corrispondentemente al valore L' avrebbe un numero di valori diversi $> n$, il che è contro del (n.° 15).

Posto pertanto k non $> n$, e chiamate 1, μ', μ'', μ''', ec. $\mu^{(k-1)}$ le k radici della Equazione $\mu^k = 1$, saranno valori della nostra serie tutti i k risultati

$$L'x + M_1 x^{\frac{p}{k}} + \text{ec.},$$

$$L'x + \mu'^{p} M_1 x^{\frac{p}{k}} + \text{ec.},$$

$$\text{(XVIII)} \quad L'x + \mu''^{p} M_1 x^{\frac{p}{k}} + \text{ec.},$$

$$L'x+\mu'''^{p} M_1 x^{\frac{p}{k}} + \text{ec.},$$

ec.

$$L'x+\mu^{(k-1)p} M_1 x^{\frac{p}{k}} + \text{ec.}.$$

Dunque in un numero k delle serie (XVII) gli esponenti β_1, β_2, β_3, ec. saranno nella ipotesi presente uguali fra loro, ed $= \frac{p}{k}$, e i rispettivi coefficienti M_1, M_2, ec. altro non saranno, che i valori M_1, $\mu'^{p} M_1$, $\mu''^{p} M_1$, $\mu'''^{p} M_1$, ec. $\mu^{(k-1)p} M_1$, ossia per essere p, k numeri primi fra loro, e come si è osservato sul fine del (n.° prec.), altro non saranno, che i valori $M_1 \mu' M_1$, $\mu'' M_1$, $\mu''' M_1$, ec. $\mu^{(k-1)} M_1$. Supposto perciò tali essere le k prime; nelle serie ulteriori

$$L'x + M_{(k+1)} x^{\beta_{(k+1)}} + \text{ec.},$$

$$\text{(XIX)} \quad L'x + M_{(k+2)} x^{\beta_{(k+2)}} + \text{ec.},$$

ec.

$$L'x + M_{(n)} x^{\beta_{(n)}} + \text{ec.},$$

gli esponenti $\beta_{(k+1)}$ $\beta_{(k+2)}$, ec. ed i coefficienti $M_{(k+1)}$, $M_{(k+2)}$, ec. potranno essere diversi dai precedenti.

19. Essendo le quantità M_1, $\mu' M_1$, $\mu'' M_1$, $\mu''' M_1$, ec. $\mu^{(k-1)} M_1$, radici di un' Equazione della forma $M^k - H = 0$ (n.° prec.) e per quanto si è detto nella dimostrazione del (n.° 2) dovendo M_1 essere funzione algebraica di L'; sarà funzione algebraica di L' anche il coefficiente H. Ora questo H è chiaro, che può corrispondentemente ad L' avere un solo, e può

avere più valori. Supposto pertanto in generale, che ne abbia un numero i, nè più nè meno, e che tali siano i valori H_1, H_2, H_3, ec. $H_{(i)}$, poichè in questa supposizione dallo stesso valore L' risultano similmente tutte le i Equazioni $M^k - H_1 = 0$, $M^k - H_2 = 0$, $M^k - H = 0$, ec. $M^k - H_{(i)} = 0$, potranno nel termine $M_1 x^{\frac{p}{k}}$ in vece di M_1 collocarsi le radici tutte di tutte queste Equazioni, ed essendo perciò valori della nostra serie corrispondenti ad L' tutti i risultati

$$\begin{array}{l}
L'x + x^{\frac{p}{k}}\sqrt[k]{H_1} + \text{ec.},\ L'x + \mu' x^{\frac{p}{k}}\sqrt[k]{H_1} + \text{ec.},\ L'x + \mu'' x^{\frac{p}{k}}\sqrt[k]{H_1} + \text{ec.},\ \text{ec.} \\
L'x + x^{\frac{p}{k}}\sqrt[k]{H_2} + \text{ec.},\ L'x + \mu' x^{\frac{p}{k}}\sqrt[k]{H_2} + \text{ec.},\ L'x + \mu'' x^{\frac{p}{k}}\sqrt[k]{H_2} + \text{ec.},\ \text{ec.} \\
L'x + x^{\frac{p}{k}}\sqrt[k]{H_3} + \text{ec.},\ L'x + \mu' x^{\frac{p}{k}}\sqrt[k]{H_3} + \text{ec.},\ L'x + \mu'' x^{\frac{p}{k}}\sqrt[k]{H_3} + \text{ec.},\ \text{ec.} \\
\text{ec.} \\
L'x + x^{\frac{p}{k}}\sqrt[k]{H_{(i)}} + \text{ec.},\ L'x + \mu' x^{\frac{p}{k}}\sqrt[k]{H_{(i)}} + \text{ec.},\ L'x + \mu'' x^{\frac{p}{k}}\sqrt[k]{H_{(i)}} + \text{ec.},\ \text{ec.}
\end{array} \tag{XX}$$

saranno tutti questi ik risultati compresi tra gli n (XVII).

20. Dovrà essere il precedente numero ik non $> n$, e se sia $ik = n$, allora tutti i risultati (XVII) si uguaglieranno a questi (XX). Che se si abbia $ik < n$; allora la serie (I) corrispondentemente ad L' avrà oltre i (XX) altri $n - ik$ valori, i quali si determineranno in maniere simili a quelle, con cui vengono determinati gli accennati (XX).

21. Si eseguisca il prodotto

$$(M^k - H_1)(M^k - H_2)(M^k - H_3)\ldots(M^k - H_{(i)}),\ \text{e pongasi} = M^{ik} + e M^{(i-1)k}$$

$+$ ec. $+ g$. I coefficienti e, ec. g non cambiandosi punto di valore, qualunque permutazione si faccia tra le H_1, H_2, H_3, ec. $H_{(i)}$, dalla natura di questi valori della H deducesi facilmente,

che i citati coefficienti e, ec., g sono tante funzioni di L′, le quali dipendentemente da questa quantità non hanno, che un valor solo; e che per conseguenza ne sono determinabili per Equazioni tutte di primo grado.

Determinati attualmente simili coefficienti e, ec. g, e supposto $M^k = H$, la precedente $M^{ik} + eM^{(i-1)k} +$ ec. $+ g$ uguagliata allo zero darà l' Equazione

$H^i + eH^{i-1} +$ ec. $+ g = 0$,

lo scioglimento della quale somministrerà tutti i precedenti valori H_1, H_2, H_3, ec. $H_{(i)}$. Se sia $k = 1$, la precedente Equazione diverrà $M^i + eM^{i-1} +$ ec. $+ g = 0$.

22. Supposto reale il valore L, potendo uno qualunque degli accennati valori di H, per esempio H_1, essere reale, od immaginario, e potendo essere uguale o disuguale da alcuni, o da tutti gli altri H_2, H_3, ec. $H_{(i)}$, cominciamo dal supporlo da tutti gli altri disuguale, e reale. In questa ipotesi si ponga $x = z^k$, si sostituisca nella prima delle serie (XX), collocando in essa nuovamente M_1 in vece di $\sqrt[k]{H_1}$ (n.° 19), e scrivendo attualmente i successivi termini $N_1 x^{\gamma_1}$, $P_1 x^{\;\;1}$, ec. (n.° 17), ed avuta così la nuova serie

$$L'z^k + M_1 z^p + N_1 z^{\gamma_1 k} + P_1 z^{\delta_1 k} + Q_1 z^{\varepsilon_1 k} + \text{ec.},$$

osservo, che per essere la quantità H_1 diversa da tutte le altre H_2, H_3, ec. $H_{(i)}$, e per essere p, k numeri primi fra loro (n.° 18), onde tutte le podestà 1, μ'^p, μ''^p, ec. $\mu^{(k-1)^p}$ risultano fra lor disuguali, il valore $M_1 = \sqrt[k]{H_1}$ è necessariamente disuguale da tutti gli altri valori, che corrispondentemente

a $\beta_1 = \frac{p}{k}$ può acquistare M (n.° 21) ; e in conseguenza di questa osservazione con un discorso simile affatto a quello de' (n.^{i} 6 , 16 , 15) concludo , che gli esponenti $\gamma_1 k$, $\delta_1 k$, $\varepsilon_1 k$, ec. deggiono essere tutti numeri intieri , e che i coefficienti N_1, P_1, Q_1, ec. sono tutti determinati dai precedenti L′, M_1 per mezzo di tante Equazioni di primo grado. Siccome poi gl' indicati esponenti deggiono sempre decrescere (n.° 1) col metodo stesso del (n.° 7) supporrò $\gamma_1 k = p - 1$, $\delta_1 k = p - 2$, $\varepsilon_1 k = p - 3$, ec., e l'esposta serie, introducendovi di più un termine generale, che chiamerò $T_1 z^{p-t}$, ed uguagliandola ad y (n.° 1), ci darà

$$y = L'z^k + M_1 z^p + N_1 z^{p-1} + P_1 z^{p-2} + Q_1 z^{p-3} + \text{ec.} + T_1 z^{p-t} + \text{ec.}.$$

Ora dalla supposta $z^k = x$, in generale ritraesi $z = \mu \sqrt[k]{x} = \mu x^{\frac{1}{k}}$: dunque sostituendo avremo ancora

$$\text{(XXI)} \quad y = L'x + \mu^p M_1 x^{\frac{p}{k}} + \mu^{p-1} N_1 x^{\frac{p-1}{k}} + \mu^{p-2} P_1 x^{\frac{p-2}{k}} + \mu^{p-3} Q_1 x^{\frac{p-3}{k}} + \text{ec.}$$

$+ \mu^{p-t} T_1 x^{\frac{p-t}{k}} + \text{ec.}$, e col porre in quest' ultima Equazione in luogo di μ successivamente i suoi valori 1 , μ', μ'', ec. $\mu^{(k-1)}$ (n.° 18) , è chiaro , che si avranno tutti i k valori di y, che corrispondono al solo valore L′ ripetuto nelle (XVIII) le volte k, ed ai k valori di M, che si contengono nella $M^k - H_1 = 0$ (n.° 19) .

23. Finora abbiamo considerati i numeri p, k primi tra loro (n.° 18), supponghiamoli ora tra loro composti . In questa

ipotesi le potenze 1, μ'^p, μ''^p, ec. $\mu^{(k-1)^p}$, quantunque siano di numero k, pure per le proprietà già note delle radici dell'unità non possono essere tutte tra di loro differenti, ma fra loro si uguagliano ad un certo numero, che è divisore esatto di k, e che chiamerò g, ponendo $k = gh$, $p = gr$, ed i numeri h, r primi fra loro. Quindi non potendo tali potenze, per l'uguaglianza fra loro a g, a g, somministrare che h valori tra loro diversi, e però che h radici della $\mu^k = 1$; ne segue, che il termine $\mu^p \mathrm{M}_1 x^{\frac{p}{k}}$ col sostituire successivamente 1, μ', μ'', ec. $\mu^{(k-1)}$ in vece di μ, non potrà ancor esso acquistare, che un numero h di valori differenti tra loro.

Denominati 1, ρ', ρ'', ec. $\rho^{(h-1)}$ gli h valori disuguali, che ottengonsi dalla μ^p per l'accennata sostituzione de' valori 1, μ', μ'', ec. $\mu^{(k-1)}$; saranno questi 1, ρ', ρ'', ec. $\rho^{(h-1)}$ anch'essi tante radici dell'unità, le radici tutte dell'Equazione $\rho^h = 1$; gli h valori tra loro diversi, che provengono da $\mu^p \mathrm{M}_1 x^{\frac{p}{k}}$ a cagione di aversi $\frac{p}{k} = \frac{r}{h}$, saranno gli $\mathrm{M}_1 x^{\frac{r}{h}}$, $\rho'^r \mathrm{M}_1 x^{\frac{r}{h}}$, $\rho''^r \mathrm{M}_1 x^{\frac{r}{h}}$ ec. $\rho^{(h-1)^r} \mathrm{M}_1 x^{\frac{r}{h}}$, ossia per essere r, h primi fra loro, e ponendo di nuovo $\frac{p}{k}$ invece di $\frac{r}{h}$, saranno gli $\mathrm{M}_1 x^{\frac{p}{k}}$, $\rho' \mathrm{M}_1 x^{\frac{p}{k}}$, $\rho'' \mathrm{M}_1 x^{\frac{p}{k}}$, ec. $\rho^{(h-1)} \mathrm{M}_1 x^{\frac{p}{k}}$; ed i coefficienti M_1, $\rho' \mathrm{M}_1$ $\rho'' \mathrm{M}_1$ ec. $\rho^{(h-1)} \mathrm{M}_1$ venendo compresi tutti in un'Equazione $\mathrm{M}^h - \mathrm{H}_1 = 0$; questa, e non già l'altra $\mathrm{M}^k - \mathrm{H}_1 = 0$ del (n.° 19), quella sarà, che dee risultare per M nella

presente supposizione. Cercando però attualmente col calcolo il valore M_1, potrebbe accadere, che si ottenesse non già la $M^h - H_1 = 0$, bensì la $M^k - H_1 = 0$; ma se questo accadesse converrebbe avere la riflessione, che non tutte le radici di questa $M^k - H_1 = 0$ servono all' intento, ma servono solamente quelle, le quali sono radici ancora della $M^h - H_1 = 0$.

Supponghiamo, che, come nelle (XVIII), si abbiano k serie, le quali comincino tutte per L', e che in esse il secondo termine a cagione di essere p, k tra loro composti, non abbia che gli h precedenti valori $M_1 x^{\frac{p}{k}}$, $\rho' M_1 x^{\frac{p}{k}}$, $\rho'' M_1 x^{\frac{p}{k}}$, ec. $\rho^{(h-1)} M_1 x^{\frac{p}{k}}$, replicandosi nelle indicate serie ciascuno di questi le volte g. Ora io dico, che quantunque accadano le accennate uguaglianze tra i primi, e tra i secondi termini, pure le supposte k serie dovranno essere tutte disuguali fra loro. Difatti dall' Equazione (VII) (n.° 4) sappiamo, che i valori di L uguali, o disuguali fra loro sono di numero m, e che ad ogni valore di L corrisponde uno di y. Ora ripetendosi nelle (XVIII) L' le volte k, vengono ad impiegarvisi k valori di L, quantunque uguali tra loro: dunque dovranno in corrispondenza risultare k valori di y; ma i valori di y deggiono essere tutti fra lor disuguali, perchè, se ve ne avessero degli uguali, allora la $f(x, y)$ avrebbe fattore razionale contro del (n.° 1). Dunque a questi k valori di y tra loro diversi uguagliandosi le k corrispondenti serie, ne viene, che anche queste serie saranno fra di lor disuguali. Dalla sola ispezione poi della (XXI) è facile a riconoscersi, come tale disuguaglianza possa attualmente accadere: succedendo al termine $\mu^p M_1 x^{\frac{p}{k}}$ gli altri $\mu^{p-1} N_1 x^{\frac{p-1}{k}}$, $\mu^{p-2} P_1 x^{\frac{p-2}{k}}$, ec.

osservo, che, siccome nei loro esponenti $\frac{p-1}{k}$, $\frac{p-2}{k}$, $\frac{p-3}{k}$, ec. i numeratori decrescono secondo la serie naturale dei numeri, tanti ne potranno esistere, ne' quali il numeratore sarà primo col denominatore k, e supposto essere $\frac{p-t}{k}$ uno di questi, il termine corrispondente $\mu^{p-t} T_1 x^{\frac{p-t}{k}}$ per la solita sostituzione de' valori 1, μ', μ'', ec. $\mu^{(k-1)}$ (n.° 18) invece di h acquisterà un numero k di valori tutti fra loro diversi, e in conseguenza di questa diversità diverranno fra lor disuguali ancora tutte le k serie corrispondenti.

24. Pongasi nella (XXI) nuovamente $\sqrt[k]{H_1}$ in vece di M_1, e si pongano successivamente i valori 1, μ', μ'', ec. in vece di μ, avremo così le serie

$$
\text{(XXII)} \quad
\begin{aligned}
y' &= L'x + x^{\frac{p}{k}} \sqrt[k]{H_1} + N_1 x^{\frac{p-1}{k}} + P_1 x^{\frac{p-2}{k}} + \text{ec.},\\
y'' &= L'x + \mu'^{p} x^{\frac{p}{k}} \sqrt[k]{H_1} + \mu'^{p-1} N_1 x^{\frac{p-1}{k}} + \mu'^{p-2} P_1 x^{\frac{p-2}{k}} + \text{ec},\\
y''' &= L'x + \mu''^{p} x^{\frac{p}{k}} \sqrt[k]{H_1} + \mu''^{p-1} N_1 x^{\frac{p-1}{k}} + \mu''^{p-2} P_1 x^{\frac{p-2}{k}} + \text{ec.},\\
&\text{ec.}
\end{aligned}
$$

ed in queste apparisce, che quando k è numero dispari, e primo con p, la prima è reale, le altre tutte immaginarie. Che se k è pari, tra esse esistono le due $L'x + x^{\frac{p}{k}} \sqrt[k]{H_1} +$ ec., $L'x - x^{\frac{p-1}{k}} \sqrt[k]{H_1} +$ ec., le quali nel caso di $H_1 > 0$ sono amendue reali, mentre sia $x > 0$, e immaginarie, allorchè $x < 0$; nel caso poi di $H_1 < 0$, se abbiasi $k = 2$, tali serie, quando sia $x < 0$, potranno essere reali, e saranno immaginarie quando $x > 0$. Esse finalmente, allorchè si abbia $k > 2$,

saranno sempre immaginarie, prendasi la x positiva o negativa, e le altre tra le esposte serie, che rimangono, oltre le due $L'x + x^{\frac{p}{k}} \sqrt[k]{H_1} +$ ec., $L'x - x^{\frac{p}{k}} \sqrt[k]{H_1} +$ ec. saranno tutte di valore immaginario.

Nelle considerazioni avvenire porremo, che nella $\frac{p}{k}$ i numeri p, k possano essere primi, e non primi fra loro.

25. Esista nella Equazione $H^i + eH^{i-1} +$ ec. $+ g = 0$ (n.° 21) un numero l di radici $= H_1$, essendo $l > 1$.

Nella precedente serie $L'z^k + M_1 z^p + N_1 z^{k\gamma_1} +$ ec. (n. 22) dovendo la parte $M_1 z^p + N_1 z^{k\gamma_1} +$ ec. corrispondentemente al solo valore M_1 avere l valori diversi; vedesi, che quanto si è detto nei precedenti (n[i] 17, ec. 24) dell' esponente β_1 del coefficiente M_1 e della serie $L'x + M_1 x^{\beta_1} +$ ec. dipendentemente dal valore L' ripetuto nelle serie le volte n, dir si deve egualmente quivi dell' esponente $k\gamma_1$ del coefficiente N_1, e della serie $M_1 z^p + N_1 z^{k\gamma_1} +$ ec. dipendentemente dal valore M_1 ripetuto le volte l. Quindi potrà ognuno da se medesimo determinare quale sia per essere la natura dell' esponente $k\gamma_1$, del coefficiente N_1, e quali, e quanti i valori della serie $M_1 z^p + N_1 z^{k\gamma_1} +$ ec. Da queste determinazioni finalmente riconosceremo quale sia l' andamento della serie $L'x + M_1 x^{\beta_1} + N_1 x^{\gamma_1} +$ ec., e in qual modo essa si divida.

26. Poichè, essendo l' Equazione data (III) di grado m non avente fattori razionali (n.° 1), esistono necessariamente m valori di y differenti fra loro, e però m serie (II) tra di loro diverse; ne segue, che quantunque esistano dei

valori tra loro uguali di L, di M, di N, ec.; pure, procedendo avanti nelle serie, si arriverà certamente ad un coefficiente, per esempio al coefficiente T, corrispondentemente a ciascun valore del quale la serie non avrà più, che un solo valore, e dopo del quale i successivi coefficienti si determineranno dai precedenti con tante Equazioni tutte di primo grado.

Supposta una delle serie (XXII) per esempio la prima $=y$, ed elevata alla potenza *kesima* la $y-L'x=x^{\frac{p}{k}}\sqrt[k]{H_1}+$ ec., otterremo $(y-L'x)^k=H_1 x^p+$ ec.

27. Per semplicità di scrivere in vece dei coefficienti M_1, N_1, P_1, ec. riponghiamo gli altri M, N, P, ec. e invece degli esponenti β_1, γ_1, ec. gli altri β, γ, ec.; e ritenuto che sia $\beta=\frac{p}{k}$, io dico, che il numeratore p di questa frazione ha per limite superiore $k-1$, cioè che non può mai essere $>k-1$; e rapporto al limite inferiore dico, che quando si abbia $k=n$ (n.^{i} 15, 18) non può essere $p<-(m-k)$, e quando sia $k<n$, non può essere $p<-(m-(k+1))$.

La verità della prima parte di questo teorema è assai facile da riconoscersi, osservando semplicemente dover essere $\frac{p}{k}=\beta$, $\beta<\alpha$ (n.° 1), ed $\alpha=1$ (n.° 3).

Per dimostrare la parte seconda, cominciamo dallo sviluppare l' Equazione $f'(x, y_1)=0$ del (n.° 2) nata pei (n.^{i} 2, 3) dalla supposizione di $y=L'x+y_1$, ordinandola siccome la (III). Essendo in questo caso pel citato (n.° 3) $a+a'L'+a''L'^2+$ ec. $+a^{(m)}L'^m$ il coefficiente nella $f'(x, y)=0$ della potestà x^m, ed essendo tal quantità uguale allo zero, l'indicata Equazione sviluppata sarà della forma

$$(\mathrm{XXIII})\left\{\begin{array}{l}(Bx^{m-1}+C\ x^{m-2}+Dx^{m-3}+\text{ec.}+Tx^2+Vx+u)+\\(A'x^{m-1}+B'\ x^{m-2}+C'x^{m-3}+\text{ec.}+T'x+V')\,y_1+\\(A''x^{m-2}+B''\ x^{m-3}+C''x^{m-4}+\text{ec.}+T'')\,y^2_1+\\(A'''x^{m-3}+B'''\ x^{m-4}+\text{ec.})\,y^3_1+\\\qquad\qquad\text{ec.}\\(A^{(k)}x^{m-k}+B^{(k)}x^{m-(k+1)}+\text{ec.})\,y_1{}^k+\\\qquad\qquad\text{ec.}\\(A^{(m-1)}x+B^{(m-1)})\,y_1{}^{m-1}+\\a^{(m)}\,y_1{}^m\,.\end{array}\right\}=0$$

Ora potendo qui ancora, come si è riflettuto pel (n.° 2) riguardo alla (III), mancare i primi termini a sinistra, che sono attualmente scritti, supporremo in generale, che i primi termini attualmente esistenti siano i seguenti

$$Gx^{m-r},\ G'x^{m-r'}y_1,\ G''x^{m-r''}y_1{}^2,\ \text{ec.}\ G^{(e)}x^{m-r^{(e)}}y_1{}^e,\ \text{ec.}\ G^{(k-1)}x^{m-r^{(k-1)}}y_1{}^{k-1},$$
$$G^{(k)}x^{m-r^{(k)}}y_1{}^k,\ \text{ec.}\ a^{(m)}\,y^m{}_1\,.$$

Tanto nella Equazione $y_1 = Mx^{\beta} + Nx^{\gamma} + \text{ec.}$ (n.° 2), come nella (XXIII) si faccia x infinita. Dalla prima di esse avendosi perciò $y_1 = Mx^{\beta}$, con la sostituzione nella seconda otterremo

$$Gx^{m-r}+GMx^{m-r'+\beta}+G''M^2x^{m-r''+2\beta}+\text{ec.}+G^{(e)}M^e x^{m-r^{(e)}+e\beta}+\text{ec.}+$$
$$G^{(k-1)}M^{k-1}x^{m-r^{(k-1)}+(k-1)\beta}+G^{(k)}M^k x^{m-r^{(k)}+k\beta}+\text{ec.}+a^{(m)}M^m x^{m\beta}=0,$$

e raccolti in questa tutti gli esponenti, ne avremo la serie

$$(\mathrm{XXIV})\quad m-r,\ m-r'+\beta,\ m-r''+2\beta,\ \text{ec.}\ m-r^{(e)}+e\beta,\ \text{ec.}$$
$$m-r^{(k-1)}+(k-1)\beta,\ m-r^{(k)}+k\beta,\ \text{ec.},\ m\beta.$$

Per essere $x=\infty$, come nel (n.° 2), si dimostra, che due per lo meno di questi esponenti (XXIV) deggiono essere uguali fra loro, e maggiori di tutti gli altri, e che da simile uguaglianza deducesi il valore di β. Ma nella supposizione presente il valore di β deve avere il denominatore k; dunque l'indicata uguaglianza non potrà accadere tra i primi k

esponenti $m-r$, $m-r'+\beta$, $m-r''+2\beta$ ec. $m-r^{(e)}+e\beta$, ec. $m-r^{(k-1)}+(k-1)\beta$; poichè essendo i coefficienti di β formati dalla serie de' numeri naturali 0, 1, 2, 3, ec. confrontando fra loro questi esponenti, il denominatore più grande si avrebbe dal paragone del primo $m-r$ con l'ultimo $m-r^{(k-1)}+(k-1)\beta$; ed un tal paragone ci dà $\beta=\frac{r^{(k-1)}-r}{k-1}$, ove il denominatore è $<k$. Dunque ec. Progrediamo innanzi a considerare tutti i diversi casi, e

1.° Facciasi nelle (XXIV) l'uguaglianza $m-r=m-r^{(k)}+k\beta$, risultando da questa $\beta=\frac{r^{(k)}-r}{k}$, avremo un' espressione, la quale avendo per denominatore k, potrà essere $=\frac{p}{k}$, e quindi rappresentare il valore di β. Ora volendo determinare il valor minimo di p nella precedente supposizione di $\beta=\frac{r^{(k)}-r}{k}$, osservo, che il suo valore più piccolo si ottiene, allorchè dal valore più piccolo, che può avere $r^{(k)}$ sottraggasi il più grande, che può ottenere r; e giacchè può essere $k=n$, $k<n$ (n.^{i} 15, 18) pongasi primieramente $k=n$. In questa ipotesi sarà necessariamente $r^{(k)}=k$: difatti per la natura delle trasformazioni, posta la (VII), ossia $a+a'L+a''L^2+\text{ec.}+a^{(m)}L^m=A$, si ha $A'=\frac{dA}{dL}$, $A''=\frac{dA'}{2dL}$, $A'''=\frac{dA''}{3dL}$, ec. $A^{(n-1)}=\frac{dA^{(n-2)}}{(n-1)dL}$, $A^{(n)}=\frac{dA^{(n-1)}}{ndL}$, e per essere L' radice n volte della Equazione (VII) (n.° 15), dalla sostituzione di L' invece di L, risultano bensì necessariamente zero tutte le quantità A, A', A'', A''', ec. $A^{(n-1)}$, ma l'ultima $A^{(n)}$ è necessariamente dallo zero diversa; dunque nel caso presente volendosi $n=k$, diverrà necessariamente diversa dallo

zero la quantità $A^{(k)}$, ossia il coefficiente nella (XXIII) del primo termine $A^{(k)} x^{m-k}$, ma mentre k, come si è dimostrato presentemente, è il valor minimo, che ha $r^{(k)}$; il valor massimo che può acquistare r dalla (XXIII) apparisce essere m. Dunque allorchè si pone $k = n$, e si pone che il valore di p provenga da $r^{(k)} - r$, il valore più piccolo di esso p sarà $k - m = -(m - k)$.

Si ponga $k < n$. Risultando da ciò per quanto si è detto poc' anzi, $A^{(k)} = 0$, e il termine, che nella (XXIII) succede immediatamente ad $A^{(k)} x^{m-k}$, essendo $B^{(k)} x^{m-(k+1)}$; ne segue, che in questa ipotesi il valore minimo, che può ottenere $r^{(k)}$, è $k+1$, e quindi che il minimo valore di p sarà $-(m-(k+1))$. Non considero il caso di $k > n$, perchè questo pel (n.° 18) non può essere.

2.° Uno qualsivoglia degli esponenti (XXIV), che dirò $m - r^{(e')} + e'\beta$, un altro ne uguagli, che dirò $m - r^{(e'')} + e''\beta$, ponendosi $e' < e''$, e il risultato $\frac{r^{(e'')} - r^{(e')}}{e'' - e'}$ che ne viene per β, si voglia $= \frac{p}{k}$. Poichè i minimi valori delle espressioni $r^{(e')}$, $r^{(e'')}$ sono rispettivamente e', e'', come apparisce dalla (XXIII), pongasi $r^{(e')} = e' + a'$, $r^{(e'')} = e'' + a''$; e poichè per essere $\frac{r^{(e'')} - r^{(e')}}{e'' - e'} = \frac{p}{k}$ deve il denominatore $e'' - e'$ risultare multiplo di k si faccia $e'' - e' = gk$. Ottenendosi da ciò $\beta = \frac{e'' - e' - (a' - a'')}{e'' - e'} = \frac{gk - (a' - a'')}{gk}$, rifletto dover essere divisibile esattamente per g eziandio $a' - a''$, e fatto quindi $a' - a'' = gi$, avremo $\beta = \frac{gk - gi}{gk} = \frac{k - i}{k}$.

Ciò posto, sia primieramente $e' > 0$. Dovendo perciò essere l'intero e' non < 1, ne verrà $e' + k$ non $< 1 + k$; ma

si ha $e'' - e' = gk$, e quindi $e'' = e' + gk$; inoltre abbiamo $r^{(e'')}$ non $< e''$, e g non < 1. Dunque essendo ancora $r^{(e'')}$ non mai $< 1 + k$, ed il massimo valore, che può acquistare $r^{(e')}$, essendo m; ne segue, che nella supposizione ora fatta di $e' > 0$, qualunque siansi i due esponenti $m - r^{(e)} + e\beta$, $m - r^{(e'')} + e''\beta$ supposti, il valor minimo del numeratore $r^{(e'')} - r^{(e')}$ sarà $1 + k - m = -(m - (k + 1))$. Ma nella ipotesi di $e' > 0$, dalla (XXIII) apparisce, che qualunque supposizione si faccia, non può giammai dal paragone degli accennati due esponenti ottenersi $\beta = \frac{p}{k}$, quando non sia $k < m$. Dunque il massimo valore di k essendo $m - 1$; ne segue, che avremo sempre $m - (k + 1)$ non < 0, e per conseguenza che $-(m - (k + 1))$ sarà non solamente il minimo valore che può acquistare la espressione $r^{(e'')} - r^{(e')}$, ma ancora il minimo che può ricevere l' altra $k - i = \frac{r^{(e'')} - r^{(e')}}{g}$.

Sia secondariamente $e' = 0$. In questa ipotesi o si vuole $g = 1$, oppure $g > 1$. Se sia $g = 1$; questo caso riducesi a quello del (prec. 1°). Che se abbiasi $g > 1$; allora avendosi ig non $> m$, ne verrà $i < m$, e però essendo $m - 1$, il massimo valore, che può attribuirsi ad i, il valore minimo corrispondente di p in $\beta = \frac{k-i}{k}$ sarà $-(m - (k + 1))$.

Dunque tenendo conto di tutti i casi possibili, concludiamo, che il minimo valore, che nella $\frac{p}{k}$ può acquistare il numeratore p, nel caso di $k = n$, è $-(m - k)$, e nel caso di $k < n$, è $-(m - (k + 1))$. Dunque ec.

28. Pel dimostrato nel (n.° prec.), $\frac{k-1}{k}$, e $-\frac{m-k}{k}$, quando si ha $k = n$; e $-\left(\frac{m-(k+1)}{k}\right)$, quando si ha $k < n$, sono i limiti di tutti i valori, che può acquistare la frazione $\frac{p}{k} = \beta$;

tutti perciò i valori, che al variare delle r, r', r'', ec. $r^{(k)}$ si possono ottenere per β saranno $\frac{k-1}{k}$, $\frac{k-2}{k}$, $\frac{k-3}{k}$, ec. fino a $-\frac{m-(k+1)}{k}$, quando si abbia $k<n$, e fino a $-\frac{m-k}{k}$, quando si abbia $k=n$. Per conseguenza sotto le varie supposizioni di $k=1, 2, 3,$ ec. m si otterranno, quando è $k<n$, i seguenti rispettivi risultati.

$k=1$; $\beta=0, -1, -2, -3$, ec. $-(m-3)$, $-(m-2)$,

$k=2$; $\beta=\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}-1$, ec. $-\left(\frac{m-4}{2}\right)$, $-\left(\frac{m-3}{2}\right)$

$k=3$; $\beta=\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1$, ec. $-\left(\frac{m-5}{3}\right)$, $-\left(\frac{m-4}{3}\right)$,

$k=4$; $\beta=\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, , \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$, ec. $-\left(\frac{m-6}{4}\right)$, $-\left(\frac{m-5}{4}\right)$

ec.

$k=n-1$; $\beta=\frac{n-2}{n-1}, \frac{n-3}{n-1}, \frac{n-4}{n-1}$, ec. $-\frac{m-(n-1)}{n-1}$ $-\frac{m-n}{n-1}$.

Quando poi si voglia $k=n$; allora corrispondentemente alle supposizioni di $k=n=1, 2, 3, 4,$ ec. m, si avranno le stesse precedenti serie, le quali però differiranno per gli ultimi termini, i quali in quest' ultimo caso saranno rispettivamente $-(m-1)$, $-\left(\frac{m-2}{2}\right)$, $-\frac{(m-3)}{3}$, $-\frac{(m-4)}{4}$; ec. o.

29. Supponghiamo, che il numero n del (n.° 15) sia >1, che corrispondentemente al valore L', ed al termine $L'x$ uno dei valori, che può avere β nel successivo termine Mx^{β}, sia lo zero, che i rispettivi valori di M siano di numero h, e che tra questi h valori ne esista un numero l, ciascuno dei quali sia $=M'$. In conseguenza di tali supposizioni allorquando si ponga negli esponenti (XXIV) (n.° 27) lo zero in luogo di β, dovendo fra essi risultarne alcuni uguali fra loro, e maggiori di tutti gli altri, supponghiamo in generale (scomparsi già essendo dai (XXIV) i termini, che contengono β) che tali siano $m-r^{(e)}$, $m-r^{(e')}$, $m-r^{(e'')}$, ec. Avendosi quindi

$m - r^{(e)} = m - r^{(e')} = m - r^{(e'')} =$ ec. maggiori di tutti gli altri esponenti, ne verrà $r^{(e)} = r^{(e')} = r^{(e'')} =$ ec., e questi minori di tutti gli altri valori, che esprimiamo con la r. Inoltre corrispondentemente ad un solo valore di β, cioè a quello di $\beta = 0$, dovendo esistere h valori di M, e questi per conseguenza dovendo essere somministrati contemporaneamente, dovrà per M risultare una sola Equazione di grado h. Dunque per la ipotesi di $x = \infty$ divenendo la (XXIII) in fine $(G^{(e)} M^{e} + G^{(e')} M^{e'} + G^{(e'')} M^{e''} + \text{ec.})\, x^{m-r^{(e)}} = 0$ (n.° 27), ossia $G^{(e)} M^{e} + G^{(e')} M^{e'} + G^{(e'')} M^{e''} + \text{ec.} = 0$, dove si ha $e < e' < e'' <$ ec. l'ultimo termine di quest' ultima Equazione dovrà contenere M^{e+h}, ed essere perciò $G^{(e+h)} M^{e+h}$; poichè col dividere tutto per M^{e} si otterrà appunto l' Equazione $G^{(e)} + G^{(e')} M^{e'-e} + G^{(e'')} M^{e''-e} + \text{ec.} + G^{(e+h)} M^{h} = 0$ di grado h. Ciò posto, siccome l'ultimo termine di quest' ultima Equazione proviene da $G^{(e+h)} M^{e+h}$, non potrà esso derivare, che dalla linea della (XXIII), che è moltiplicata per y_1^{e+h}; ma fra i termini, che esistono entro le parentesi dell' indicata linea, niuno ve n'ha, il cui esponente sopra della x sia $> m - (e + h)$. Dunque il minimo valore, che può nell' esponente $m - r^{(e+h)}$ ottenere $r^{(e+h)}$ essendo $e + h$, ne segue, che il valore più piccolo, che può acquistare $r^{(e)} = r^{(e')} = r^{(e'')} = \text{ec.} = r^{(e+h)}$, sarà $e + h$, e di questo $e + h$ sarà maggiore qualunque altro dei valori, che esprimiamo con la lettera r. In conseguenza di tutto ciò diremo, che

1.° Quando $r^{(e+h)}$ rappresenta $r^{(h)}$, il minimo valore, che può esso avere, è h, e i valori degli r, r', r'', ec. sono tutti uguali, o maggiori di h; quando $r^{(e+h)}$ rappresenta $r^{(1+h)}$,

il minimo valore, che può avere $r^{(1+h)}$, è $1+h$, e i valori degli r, r', r'', ec. ne sono uguali, o più grandi; allorchè con $r^{(e+h)}$ esprimesi $r^{(2+h)}$, $2+h$ è il valore più piccolo, che può avere $r^{(2+h)}$, ed r, r', r'', ec. ne sono tutti uguali o maggiori; e così di seguito.

2.° Il caso pertanto, nel quale r, r', r'', r''', ec. hanno il valore più piccolo di tutti, quello si è, nel quale $r^{(e+h)}$ rappresenta $r^{(h)}=h$, e ponendo $r^{(e)}=r^{(e')}=r^{(e'')}=$ ec. $=h$, la (XXIII) diverrà in corrispondenza

$$(\text{XXV})\left\{\begin{array}{l}(G\,x^{m-h}+I\,x^{m-(h+1)}+\text{ec.}+Vx+u)+\\(G'\,x^{m-h}+I'\,x^{m-(h+1)}+\text{ec.}+V)y_1+\\(G''x^{m-h}+I''x^{m-(h+1)}+\text{ec.})y_1{}^2+\\\qquad\qquad\text{ec.}\\(G^{(h)}x^{m-h}+I^{(h)}x^{m-(h+1)}+\text{ec.})y^h{}_1\\\qquad\qquad\text{ec.}\\a^{(m)}y_1{}^m.\end{array}\right\}=0$$

3.° Il caso accennato nel (prec. 2.°) ha luogo bensì, quando si abbia n (n.° 15) $=h$; perchè allora, risultando $A^{(h)}=A^{(n)}$, ed essendo il valore $A^{(n)}$ diverso dallo zero (n.° 27), nella (XXIII) sussiste il termine $A^{(h)}x^{m-h}$; quindi nella (XXV) si ha $G^{(h)}=A^{(h)}$ attualmente esistente, e però essendo $r^{(h)}=h$, potrà essere $=h$ ancora ciascuno dei numeri r, r', r'', ec.. Ma se si abbia $n>h$; allora il minimo valore di ciascuno dei numeri medesimi non potrà più essere h, ma ne sarà maggiore. Difatti nella precedente Equazione in M, e quindi nell'esponente $m-r^{(e+h)}$ o si vuole che sia $e=0$, oppure $e>0$; nel primo di questi casi osservo che $m-r^{(h)}$ non è che l'esponente sopra la x del primo a sinistra dei termini, che moltiplicano $y^h{}_1$; ma a cagione di $n>h$, essendo $A^{(h)}=0$ (n.° 27) si ha eziandio nella (XXV) $G^{(h)}=0$.

Dunque il minimo valore, che potrà in questa ipotesi avere $r^{(h)}$, sarà $h+1$: ma per quanto si è detto di sopra niuno degli altri numeri r, r', r'', ec. può avere valore più piccolo del valore nel caso presente di $r^{(h)}$: dunque quando si pone $h<n$, ed $e=0$, il valore più piccolo, che può acquistare ciascuno dei numeri r, r', r'', ec. non è già h, ma bensì $h+1$. Vogliasi, che sia $e>0$: abbiamo già accennato di sopra, che il minimo valore, che può avere $r^{(e+h)}$ è $e+h$, e che questo $r^{(e+h)}$ è uguale o minore di ciascuno degli r, r', r'', ec. Dunque ancora quando sia $e>0$, risulta, che mentre n supera h, il valore più piccolo, che possono avere i numeri r, r', r'', ec. non è già h, ma ne è maggiore.

L'Equazione (XXV), per quanto si è già detto, suppone il caso di $n=h$; ma potrà ancora servire all'altro di $n>h$, bastando perciò supporre in essa ciascuno dei coefficienti G, G', G'', ec. $G^{(h)}=0$, e tener conto dei successivi I, I', I'', ec. $I^{(h)}$; oppure L', L'', L''', ec. $L^{(h)}$, ec.

4.° È facile dal (n.° 15) il riconoscere, che parlandosi quivi dei valori di M, che procedono da L', deve essere h non $>n$; e non potendo aversi $A^{(n)}=0$ (n.° 27), non potrà neppure risultare giammai $h+e>n$, qualunque vogliasi che sia il valore di e.

5.° Si supponga nel (n.° 2) $Nx^{\gamma}+Px^{\delta}+\text{ec.}=y_2$, e giacchè nel caso presente abbiamo $Mx^{\beta}=M$, e quindi $y_1=M+y_2$; col sostituire nella (XXV), otterremo la trasformata

$$
(\text{XXVI}) \left\{ \begin{array}{l}
(G_1 x^{m-h} + I_1 x^{m-h-1} + \text{ec.} + V_1 x + u) + \\
(G'_1 x^{m-h} + I'_1 x^{m-h-1} + \text{ec.} + V_1) y_2 + \\
(G''_1 x^{m-h} + I''_1 x^{m-h-1} + \text{ec.}) y_2^2 + \\
\qquad\qquad \text{ec.} \\
(G_1^{(h)} x^{m-h} + I_1^{(h)} x^{m-h-1} + \text{ec.}) y_2^h \\
\qquad\qquad \text{ec.} \\
a^{(m)} y_2^m
\end{array} \right\} = 0
$$

nella quale sarà $G_1 = G + G'M + G''M'' + \text{ec.} + G^{(h)} M^h$, e sarà $G'_1 = \frac{dG}{dM}$, $G''_1 = \frac{dG'_1}{2dM}$, $G'''_1 = \frac{dG''_1}{3dM}$, ec., e collocando in vece di M il valore M', risulterà $G_1 = 0$, $G'_1 = 0$, $G''_1 = 0$, ec., $G_1^{(l-1)} = 0$, $G_1^{(l)}$ non $= 0$, giacchè M' è per la ipotesi radice l volte della Equazione $G_1 = 0$.

30. 1.° Ritenute le supposizioni del (n.° prec.), e supposto nel termine Nx^γ l' esponente $\gamma = \frac{q}{k'}$, si cercano i limiti del numeratore q, come nel (n.° 27) sonosi determinati i limiti del numeratore p della $\frac{p}{k}$. Essendo nel caso presente $\beta = 0$ (n.° prec.), dovendo pel (n.° 1) essere $\gamma < \beta$, ed essere q numero intero (n.° 2), il valore più grande, che potrà ottenere q, è chiaro, che sarà -1. Per determinare in seguito il valore più piccolo, si faccia $x = \infty$, si sostituisca nella (XXVI) tanto in luogo di M il valore M' quanto Nx^γ invece di y_2, e denominiamo $m - r_1$, $m - r'_1 + \gamma$, $m - r''_1 + 2\gamma$, ec. gli esponenti dei termini, che rimangono per la ipotesi di x infinita dalla Equazione (XXVI): eseguendo poscia su di questi esponenti un discorso simile a quello del cit.° (n.° 27), comincisi dall' uguagliare il primo $m - r_1$

con l'esponente $m-r_1^{(k')}+k'\gamma$. Avendosi quindi $\gamma=\frac{r_1^{(k')}-r_1}{k'}$, siccome il valor massimo, che può ottenere r_1 è m, ed il minimo, che può attribuirsi ad $r_1^{(k')}$, quando si ha $h=n$, è h, e quando $h<n$, è $h+1$ (2.°, 3.° n.° prec.); ne segue, che in questa prima supposizione il valore più piccolo, che può avere il numeratore q, nel caso di $h=n$, è $h-m=-(m-h)$ e nel caso di $h<n$, è $-(m-(h+1))$.

Uguagliando in seguito fra di loro due qualsivogliono degli accennati esponenti, che dirò in gnerale $m-r_1^{(e')}+e'\gamma$, $m-r_1^{(e'')}+e''\gamma$, ove sia $e''>e'$, si ponga, che il valore, il quale perciò risulta di $\gamma=\frac{r_1^{(e'')}-r_1^{(e')}}{e''-e'}$ sia $=\frac{q}{k'}$. Dovendo in conseguenza di ciò essere $e''-e'$, ed $r_1^{(e'')}-r_1^{(e')}$ equimultipli di k', e di q, è dovendo di più sì $r_1^{(e')}$, che $r_1^{(e'')}$ essere non minore, nel caso di $h=n$, di h, e nel caso di $h<n$, di $h+1$ (2.°, 3.° n.° prec.), suppongasi $e''-e'=gk'$, $r_1^{(e')}=h+a'$, $r_1^{(e'')}=h+a''$, oppure $r_1^{(e')}=h+1+a'$, $r_1^{(e'')}=h+1+a''$ secondochè si ha $h=$, ovvero $<n$, ed $r_1^{(e'')}-r_1^{(e')}=-(a'-a'')$ $=-gi$, e avremo $\gamma=-\frac{gi}{gk'}=-\frac{i}{k'}=\frac{q}{k'}$. Ora se si abbia $g=1$; questo caso riducesi pienamente a quello, che si è considerato poc' anzi: tralasciato esso adunque, abbiasi $g>1$. In questa ipotesi osservo, che, essendo $-(m-h)$ nel caso di $h=n$, e $-(m-(h+1))$ nel caso di $h<n$, il valor più piccolo, che può ricevere $r_1^{(e'')}-r_1^{(e')}$ essendo evidentemente $m-h$ nel primo di questi casi, ed $m-(h+1)$ nel

secondo sempre non < 0, ed essendo $i < gi$, deve $-(m-h)$ nel primo de' casi accennati, e nel secondo $-(m-(h+1))$ essere il valor minimo, che può acquistare $-i$. Dunque concluderò che ancora in quest' ultima supposizione, siccome nella precedente, il valor minimo, che nella $\frac{q}{k'}$, può ricevere il numeratore q, quando si ha $h=n$, è $-(m-h)$, e quando $h<n$ è $-(m-(h+1))$.

2.° Dunque, trascurata la ipotesi di $h>n$ perchè impossibile (4.° n.° prec.), stabiliremo, che i valori tutti, che può ricevere la frazione $\frac{q}{k'}$, nel caso di $h=n$ sono $\frac{-1}{k'}$, $\frac{-2}{k'}$ $-\frac{3}{k'}$, ec. $-\frac{(m-h)}{k'}$, e nel caso di $h<n$, sono $-\frac{1}{k'}$, $-\frac{2}{k'}$, $-\frac{3}{k'}$, ec. $-\frac{(m-(h+1))}{k'}$.

3.° In quest' ultima supposizione di $h<n$, avremo i seguenti risultati particolari (prec. 2.°).

$k'=1$; $\gamma=-1, -2, -3$, ec. $-(m-(h+1))$,

$k'=2$; $\gamma=-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}$, ec. $-\frac{(m-(h+1))}{2}$,

$k'=3$; $\gamma=-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1$, ec. $-\frac{(m-(h+1))}{3}$,

$k'=4$; $\gamma=-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$, ec. $-\frac{(m-(h+1))}{4}$,

ec.

$k'=l$; $\gamma=-\frac{1}{l}, -\frac{2}{l}, -\frac{3}{l}$, ec. $-\frac{(m-(h+1))}{l}$.

Allorchè si voglia $h=n$, le serie ora trovate dovranno pel (prec. 2.°) accrescersi rispettivamente dei termini $-(m-h)$, $-\left(\frac{m-h}{2}\right)$, $-\left(\frac{m-h}{3}\right)$, $-\left(\frac{m-h}{4}\right)$, ec. $-\left(\frac{m-h}{l}\right)$.

4.° La supposizione di $\beta=0$ (n.° 29) nel valore di $\beta=\frac{p}{k}$ porta, che sia zero il numeratore p, giacchè k deve avere un valore finito; e qualunque sia questo numero

finito k, è facile a vedersi, che dipendentemente da $\beta = \frac{p}{k} = 0$ i valori di γ nel termine Nx^{γ} sono sempre quelli, che abbiamo determinati nei (prec. 1.°, 2.°, 3.°): perchè qualunque sia k, avendosi sempre $\beta = 0$, e non cambiandosi i valori di h e di l (n.° 29), il discorso ed il calcolo per la determinazione di γ è sempre il medesimo. Riflettasi frattanto, che qualunque siasi questo k, deve sempre risultare h non $< k$ (n.^{i} 18, 29).

5.° Potrebbe divenire nel caso di $h < n$ la quantità $-(m-(h+1))$, e nel caso di $h = n$ la $-(m-h) = -1$; in allora diremo, che $\frac{q}{k'}$ non ha che un solo valore, cioè il solo $-\frac{1}{k'}$. Che se nel primo de' casi ora accennati risultasse la $-(m-(h+1))$, e nel secondo la $-(m-h) > -1$; allora diremo, che la $\frac{q}{k'}$ non può avere valore alcuno: perchè in tale supposizione il valor minimo di $\frac{q}{k'}$ diverrebbe maggiore del massimo, il quale è $-\frac{1}{k'}$: il che è un' assurdo.

6.° Supponghiamo $n = m$, e nel caso di $h < n$ sia $h = m - 1$, ponendo $h = m$ nella ipotesi di $h = n$. In amendue queste supposizioni il valor minimo di $\frac{q}{k'}$, risultando $= \frac{0}{k'}$, avrà luogo l'assurdo del (prec. 5°). Ma per riconoscere quale sia in questi due casi l' Equazione (XXIII) ossia la (XXV), a cui la (XXIII) si è ridotta (1.°, 2°. n.° 29), osservo, che la massima potenza della x nella citata (XXV) nella seconda delle supposizioni fatte è $x^{m-h} = x^{m-m} = x^{0} = 1$, e nella prima è $x^{m-(h+1)} = x^{m-(m-1+1)} = x^{0} = 1$. Dunque sì nell'una, che nell' altra delle ipotesi la (XXV), e però la (XXIII) si ridurrà alla $u + V'y_1 + T'y_1^2 + S'y_1^3 + \text{ec.} + a^{(m)}y_1^m = 0$; ma

essendo questa Equazione priva della x affatto, non può rappresentare alcuna curva: dunque non deve sorprendere, se il termine Nx^{γ} risulta di valore assurdo, poichè la supposizione di $\alpha > \beta > \gamma > \delta >$ ec. (n.° 1°) stabilisce, che la data $f(x, y) = 0$ esprima realmente una curva. La trovata $u + V'y_1 + T'y_1^2 + \text{ec.} + a^{(m)} y_1^m = 0$ esprime un sistema di tante rette parallele fra loro, quanti sono in essa i fattori reali.

31. Pongasi $p = k - 1$: essendo $k - 1$ il massimo valore, che può ricevere p (n.° 27), questa supposizione di $p = k - 1$ non toglierà punto alla generalità; perchè si può sempre considerare, che esistano tutti i termini da quello di esponente massimo in avanti, dando lo zero per coefficiente a' quei termini, che nei casi particolari possono mancare. Ora dal termine generale $T'x^{\frac{k-t}{k}}$ apparisce, che quando a t si danno i valori 0, k, $2k$, $3k$, $4k$, ec., dalla $x^{\frac{k-t}{k}}$ risultano tutte le potenze intere x, x^0, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, ec. e quando allo stesso t si danno i valori intermedj agli accennati; allora risultano tutte le potenze fratte, che aventi nell' esponente il denominatore k esistono tra le intere x, x^0, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, ec.; inoltre di queste podestà fratte tante ne esistono tra x, ed x^0, quante ne sono tra x^0, ed x^{-1}, quante tra x^{-1}, ed x^{-2}, e così di seguito; e finalmente riesce più conveniente, e più comodo servirsi delle lettere L, M, N, P, ec. affine di rappresentare i coefficienti delle potenze intiere x, x^0, x^{-1}, x^{-2}, ec.: dunque servendoci delle L_1, L_2, L_3 ec. $L_{(k-1)}$, per esprimere i coefficienti dei termini intermedj tra x, ed x^0, delle M_1, M_2, M_3, ec. $M_{(k-1)}$ per esprimere i coefficienti dei termini esistenti tra x^0, ed x^{-1}, delle N_1, N_2, N_3, ec. $N_{(k-1)}$ pei coefficienti dei termini fra x^{-1} ed x^{-2}, e così in progresso, ridurremo la serie (XXI) (n.° 22) alla

$$y = L'x + \mu^{k-1} L'_1 x^{\frac{k-1}{k}} + \mu^{k-2} L'_2 x^{\frac{k-2}{k}} + \mu^{k-3} L'_3 x^{\frac{k-3}{k}} + \text{ec.} + \mu L'_{(k-1)} x^{\frac{1}{k}} +$$

$$M' + \mu^{-1} M'_1 x^{-\frac{1}{k}} + \mu^{-2} M'_2 x^{-\frac{2}{k}} + \mu^{-3} M'_3 x^{-\frac{3}{k}} + \text{ec.} + \mu^{-(k-1)} M'_{(k-1)} x^{-\frac{k-1}{k}} +$$

$$N'x^{-1} + \mu^{-(k+1)} N'_1 x^{-\frac{k+1}{k}} + \mu^{-(k+2)} N'_2 x^{-\frac{k+2}{k}} + \mu^{-(k+3)} N'_3 x^{-\frac{k+3}{k}} + \text{ec.} +$$

$$\mu^{-(2k-1)} N'_{(k-1)} x^{-\frac{2k-1}{k}} +$$

$$P'x^{-2} + \mu^{-(2k+1)} P'_1 x^{-\frac{2k+1}{k}} + \mu^{-(2k+2)} P'_2 x^{-\frac{2k+2}{k}} + \mu^{-(2k+3)} P'_3 x^{-\frac{2k+3}{k}}$$

$$+ \text{ec.} + \mu^{-(3k-1)} P'_{(k-1)} x^{-\frac{3k-1}{k}} +$$

$$\text{ec.}$$

e a cagione di essere $\mu^k = 1$, avendosi $\mu^{k-1} = \mu^{-1} = \mu^{-(k+1)} = \mu^{-(2k+1)} = \mu^{-(3k+1)} = \text{ec.}$, $\mu^{k-2} = \mu^{-2} = \mu^{-(k+2)} = \mu^{-(2k+2)} = \mu^{-(3k+2)} = \text{ec.}$, $\mu^{k-3} = \mu^{-3} = \mu^{-(k+3)} = \mu^{-(2k+3)} = \mu^{-(3k+3)} =$ ec. ridurremo la serie medesima alla

$$\begin{aligned}
y = {} & (L'x + M' + N'x^{-1} + P'x^{-2} + Q'x^{-3} + \text{ec.}) + \\
& \mu^{k-1} x^{\frac{k-1}{k}} \left(L'_1 + M'_1 x^{-1} + N'_1 x^{-2} + P'_1 x^{-3} + \text{ec.} \right) + \qquad \text{(XXVII)} \\
& \mu^{k-2} x^{\frac{k-2}{k}} \left(L'_2 + M'_2 x^{-1} + N'_2 x^{-2} + P'_2 x^{-3} + \text{ec.} \right) + \\
& \mu^{k-3} x^{\frac{k-3}{k}} \left(L'_3 + M'_3 x^{-1} + N'_3 x^{-2} + P'_3 x^{-3} + \text{ec.} \right) + \\
& \text{ec.} \ldots\ldots + \\
& \mu x^{\frac{1}{k}} \left(L'_{(k-1)} + M'_{(k-1)} x^{-1} + N'_{(k-1)} x^{-2} + P'_{(k-1)} x^{-3} + \text{ec.} \right).
\end{aligned}$$

Si denominino X, X', X'', X''', ec. $X^{(k-1)}$ le funzioni della

x, che nella (XXVII) moltiplicano le successive potenze $1, \mu^{k-1}, \mu^{k-2}, \mu^{k-3}$, ec., e sostituendo avremo

$$y = X + \mu^{k-1} X' + \mu^{k-2} X'' + \mu^{k-3} X''' + \text{ec.} + \mu X^{(k-1)},$$

Collocati finalmente in vece di μ i suoi valori, e chiamati $y', y'', y''', y^{\text{v}}$, ec. $y^{(k)}$ i rispettivi valori di y, ne verrà

$$\begin{aligned} y' &= X + X' + X'' + X''' + \text{ec.} + X^{(k-1)}, \\ y'' &= X + \mu'^{k-1} X' + \mu'^{k-2} X'' + \mu'^{k-3} X''' + \text{ec.} + \mu' X^{(k-1)}, \\ y''' &= X + \mu''^{k-1} X' + \mu''^{k-2} X'' + \mu''^{k-3} X''' + \text{ec.} + \mu'' X^{(k-1)}, \\ y^{\text{v}} &= X + \mu'''^{k-1} X' + \mu'''^{k-2} X'' + \mu'''^{k-3} X''' + \text{ec.} + \mu''' X^{(k-1)}, \\ &\text{ec.} \\ y^{(k)} &= X + \mu^{(k-1)\,k-1} X' + \mu^{(k-1)\,k-2} X'' + \mu^{(k-1)\,k-3} X''' + \text{ec.} + \mu^{(k-1)} X^{(k-1)} \end{aligned} \quad \text{(XXVIII)}$$

Sia per esempio $k = 2$, risultando due soli i valori di μ cioè 1, e $\mu' = -1$, le precedenti (XXVIII) diverranno

$y' = X'$, $y'' = X + X'$ essendo poi

$$X = L'x + M' + N'x^{-1} + P'x^{-2} + Q'x^{-3} + \text{ec.}$$

$$X' = x^{\frac{1}{2}} \left(L'_1 + M'_1 x^{-1} + N'_1 x^{-2} + P'_1 x^{-3} + \text{ ec.} \right)$$

Vagliasi per secondo esempio $k = 3$; per μ avremo i tre valori 1, $\mu' = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\mu'' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, e quindi dalle (XXVIII) si ricaverà

$$\begin{aligned} y' &= X + X' + X'' \\ y'' &= X + \mu'^2 X' + \mu' X'' \\ y'' &= X + \mu''^2 X' + \mu'' X'', \text{ avendosi poi} \end{aligned}$$

$$X = L'x + M' + N'x^{-1} + P'x^{-2} + Q'x^{-3} + \text{ec.},$$

$$X' = x^{\frac{2}{3}} \left(L'_1 + M'_1 x^{-1} + N'_1 x^{-2} + P'_1 x^{-3} + \text{ec.} \right)$$

$$X'' = x^{\frac{1}{3}} \left(L'_2 + M'_2 x^{-1} + N'_2 x^{-2} + P'_2 x^{-3} + \text{ec.} \right).$$

CAPO III.

Altre Proprietà dei coefficienti delle Equazioni (II).

32. La dimostrazione del teorema del (n.° 14) esige che i valori L', L'', ec. $L^{(m)}$ siano tutti fra loro disuguali : cerchiamo ora di determinare cosa accada , allorchè l' accennata totale disuguàglianza non ha luogo .

I. Ripreso perciò sotto considerazione il caso generale , cioè il (5.° n.° 14), nel quale si pongono zero tutti i valori dei coefficienti N, P, Q, ec. S, e si fissa l'attenzione sopra i valori del coefficiente T nel termine Tx^{-n}, cominciamo a supporre $L' = L^{(n)}$, essendo da questo $L^{(n)}$, e fra loro disuguali tutti gli altri valori L'', L''', ec. $L^{(n-1)}$. Ottenendosi ancora in questo caso $\Sigma T = 0$, $\Sigma LT = 0$, $\Sigma L_2 T = 0$, ec. $\Sigma L_{(n-1)} T = 0$, come nel (V. n.° 14) ricaveremo le Equazioni (XIII); ma per la supposizione fatta avendosi $L' - L^{(n)} = A' = 0$, dalle citate (XIII) svaniscono tutti i termini, che contengono T' e rimangono tutti gli altri; di più esse Equazioni (XIII) sono di numero $n - 1$, e scomparso essendo il valore T', gli altri T'', T''', ec. $T^{(n-1)}$, che soli vi rimarrebbero nella supposizione fatta nel cit.° (V. n.° 14) di $T^{(n+1)} = 0$, $T^{(n+2)} = 0$, ec. $T^{(m)} = 0$, sarebbero di numero $n - 2$, onde il numero delle Equazioni medesime supererebbe di uno il numero dei valori della T contenutivi . Dunque, supposto in questo caso, che i valori di essa T uguali allo zero siano $T^{(n+2)}$, $T^{(n+3)}$, ec. $T^{(m)}$, affinchè nelle (XIII) contengasi ancora $T^{(n+1)}$, e così dopo la scomparsa di T', siano ivi di numero $n - 1$ tanto le Equazioni quanto i valori di T ; col proseguire avanti sulle (XIII)

il discorso medesimo del cit° (V. n.° 14.) , troveremo in egual maniera dover essere $T'' = 0$, $T''' = 0$, ec. $T^{(n-1)} = 0$, $T^{(n+1)} = 0$, e dall' Equazione $\Sigma T = 0$, risultare in fine $T' + T^{(n)} = 0$. Dunque nella supposizione fatta, che siano sólamente uguali fra loro i due valori L', $L^{(n)}$, i valori di T corrispondenti ai valori L'', L''', ec., o dovranno mancare affatto, o dovranno essere di un numero che sia $> n - 1$; i valori poi T', $T^{(n)}$ corrispondenti ad $L' = L^{(n)}$, potranno sussistere, ma sussistendo, nel caso nel quale mancano tutti gli altri valori T''', T'^{v}, ec., dovrà essere $T^{(n)} = - T'$.

II. Abbiasi $L' = L'' = L^{(n)}$, e tutti gli altri valori L''', L'^{v}, ec. ne siano disuguali, e siano disuguali fra loro. Poichè presentemente si ha nel (V. n.° 14) $A' = L' - L^{(n)} = 0$, $A'' = L'' - L^{(n)}$; svaniranno tosto nelle (XIII) tutti i termini, che contengono T' e tutti quelli, che contengono T''; ma se si volessero sussistenti, come nel cit. (V. n.° 14) soltanto i valori T', T'', ec. $T^{(n)}$, allora in esse (XIII), che sono di numero $n-1$, resterebbero solo $n-3$ valori di T, cioè T''', T'^{v}, ec. $T^{(n-1)}$; dunque volendo, che ancora nel caso presente nelle (XIII) tanti siano i valori attualmente esistenti di T, quante sono le Equazioni, supporrò zero solamente i valori $T^{(n+3)}$, $T^{(n+4)}$, ec. $T^{(m)}$. Ora anche in questa ipotesi il discorso del (V. n.° 14) ci dimostra in conseguenza delle stesse (XIII), che deggiono essere zero eziandio tutti i valori T''', T'^{v}, ec. $T^{(n-1)}$, $T^{(n+1)}$, $T^{(n+2)}$; e inoltre ottienesi in fine $\Sigma T = T' + T'' + T^{(n)} = 0$. Dunque nella supposizione presente o i valori di T, che corrispondono ai valori tra loro diversi di L sono in un numero $> n - 1$, oppure mancano affatto, e in quest' ultimo caso corrispondentemente ai valori tra loro uguali L', L'', $L^{(n)}$ si ha $T^{(n)} = -(T' + T'')$.

III. In generale supponghiamo $L' = L'' = L''' =$ ec. $= L^{(p)} = L^{(n)}$, ponendo poi da questi e fra loro disuguali tutti gli altri valori di L. Risultando perciò nel (V. n.° 14) $A' = 0$, $A'' = 0$, $A''' = 0$, ec. $A^{(p)} = 0$; dalle Equazioni (XIII) svaniranno tosto tutti i valori T', T'', T''', ec. $T^{(p)}$, e supposto, che da principio non si fossero fatti zero, che i valori $T^{(n+p+1)}$, $T^{(n+p+2)}$, $T^{(n+p+3)}$, ec. $T^{(m)}$, nelle (XIII) stesse si conterranno tutti gli altri $T^{(p+1)}$, $T^{(p+2)}$, $T^{(p+3)}$, ec. $T^{(n-1)}$, $T^{(n+1)}$, $T^{(n+2)}$, ec. $T^{(n+p)}$, i quali sono di numero $n - 1 - p + p = n - 1$; ma altrettante sono le Equazioni (XIII); dunque dal solito raziocinio del (V. n.° 14) ritraendosi $T^{(p+1)} = 0$, $T^{(p+2)} = 0$, $T^{(p+3)} = 0$, ec. $T^{(n-1)} = 0$, $T^{(n+1)} = 0$, $T^{(n+2)} = 0$, ec., $T^{(n+p)} = 0$, concluderemo, che, se, nella supposizione fatta sussister deggiono dei valori di T corrispondenti ai valori di L disuguali, essi deggiono essere in un numero $> n - 1$, altrimenti che mancheranno tutti, e mancando, si avrà poi corrispondentemente ad $L' = L'' = L''' =$ ec. $= L^{(p)} = L^{(n)}$ l' Equazione $T' + T'' + T''' +$ ec. $+ T^{(p)} + T^{(n)} = 0$.

IV. Finalmente con tutta la generalità si supponga

$$L' = L'' = L''' = \text{ec.} = L^{(p)},$$
$$L^{(p+1)} = L^{(p+2)} = L^{(p+3)} = \text{ec.} = L^{(p+q)},$$
$$L^{(p+q+1)} = L^{(p+q+2)} = L^{(p+q+3)} = \text{ec.} = L^{(p+q+r)},$$
$$\text{ec.}$$

e si supponga, che tutti i valori $L^{(p)}$, $L^{(p+q)}$; $L^{(p+q+r)}$, ec. $L^{(p+q+r+\text{ec.})}$, ec. siano disuguali fra loro. In questa ipotesi si faccia $T' + T'' + T''' +$ ec. $+ T^{(p)} = Z^{(p)}$

$$T^{(p+1)} + T^{(p+2)} + T^{(p+3)} + \text{ec.} + T^{(p+q)} = Z^{(p+q)}.$$

$$T^{(p+q+1)}+T^{(p+q+2)}+T^{(p+q+3)}+\text{ec.}+T^{(p+q+r)}=Z^{(p+q+r)}$$

ec.

risultandone, come nel (n.° 14),

$$\Sigma T=Z^{(p)}+Z^{(p+q)}+Z^{(p+q+r)}+\text{ec.}+T^{(p+q+r+\text{ec.})}+\text{ec.},$$

$$\Sigma LT=-(L^{(p)}Z^{(p)}+L^{(p+q+r)}Z^{(p+q+r)}+\text{ec.}+L^{(p+q+r+\text{ec.})}T^{(p+q+r+\text{ec.})}+\text{ec.}$$

(XXIX)

$$\Sigma L_2T=L_2^{(p)}Z^{(p)}+L_2^{(p+q)}Z^{(p+q)}+L_2^{(p+q+r)}Z^{(p+q+r)}+\text{ ec. }+L_2^{(p+q+r+\text{ec.})}T^{(p+q+r+\text{ec.})}+\text{ec.},$$

$$\Sigma L_3T=-(L_3^{(p)}Z^{(p)}+L_3^{(p+q)}Z^{(p+q)}+L_3^{(p+q+r)}Z^{(p+q+r)}+\text{ec.}+L^{(p+q+r+\text{ec.})}T^{(p+q+r+\text{ec.})}+\text{ec.}),$$

ec.

$$\Sigma L_{(n-1)}T=\pm(L_{(n-1)}^{(p)}Z^{(p)}+L_{(n-1)}^{(p+q)}Z^{(p+q)}+L_{(n-1)}^{(p+q+r)}Z^{(p+q+r)}+\text{ec.}+L_{(n-1)}^{(p+q+r+\text{ec.})}T^{(p+q+r+\text{ec.})}+\text{ec.});$$

se si vorrà, che in questo caso le quantità $Z^{(p)}$, $Z^{(p+q)}$, $Z^{(p+q+r)}$, ec. $T^{p(+q+r+\text{ec.})}$ ec., che si contengono nelle precedenti Equazioni (XXIX), siano di numero n, essendosi già posti uguali allo zero gli ulteriori valori di T; con un discorso perfettamente uguale a quello del (V. n.° 14) applicato quivi sulle (XXIX) come fu là applicato sulle (XII), troveremo in egual modo risultare $Z^{(p)}=0$, $Z^{(p+q)}=0$, $Z^{(p+q+r)}=0$, ec. $T^{(p+q+r+\text{ec.})}=0$, ec.; e per conseguenza supposto, che le $Z^{(p)}$, $Z^{(p+q)}$, $Z^{(p+q+r)}$, ec. siano di numero h; poichè i valori $T^{(p+q+r+\text{ec.})}$, ec. risultano di un numero $n-h$, diremo, che, poste le precedenti uguaglianze tra i valori di L, gli altri valori di L, che sono disuguali fra loro e dagli accennati, se sussistono, deggiono essere di un numero $>n-h$; e mancando essi, si avranno poi le h Equazioni

$$T' + T'' + T''' + \text{ec.} + T^{(p)} = 0,$$
$$T^{(p+1)} + T^{(p+2)} + T^{(p+3)} + \text{ec.} + T^{(p+q)} = 0,$$
$$T^{(p+q+1)} + T^{(p+q+2)} + T^{(p+q+3)} + \text{ec.} + T^{(p+q+r)} = 0,$$
ec.

33. Si cercano i valori delle Σy_1, Σy_2, Σy_3, Σy_4, ec.; allorchè, restando α costantemente $= 1$, abbiamo uno, o più dei valori di β fratti.

Prima di risolvere questo Problema, converrà che esponghiamo alcune proprietà delle radici dell' unità, che sono state da me esposte in una Memoria presentata al R.C. Istituto delle Scienze Lettere ed Arti.

1.° Date le due espressioni $\Sigma\mu_{(i)}$, $\Sigma\mu^{l}$, la prima delle quali rappresenta la somma di tutti i prodotti ad i ad i delle k radici dell' Equazione $\mu^{k} = 1$ (n.° 18), e la seconda la somma di tutte le potenze *lesime* siano esse positive, o negative, o zero delle radici medesime, sappiamo, che quando il numero i, il quale non può essere nè negativo, nè $> k$, sia $< k$; deve essere sempre $\Sigma\mu_{(i)} = 0$, e quando $i = k$, deve essere $\Sigma\mu_{(k)} = \mu' \mu'' \mu''' \ldots \mu^{(k-1)} = \pm 1$, prendendosi il segno superiore, o l' inferiore, secondochè k è dispari, o pari. Sappiamo inoltre, che, quando il numero l non è multiplo di k, allora risulta $\Sigma\mu^{l} = 0$, e quando l ne è multiplo, allora ottienesi $\Sigma\mu^{l} = k$.

2.° Supposto, che le $\Sigma\mu^{a}\mu^{b}$, $\Sigma\mu^{a}\mu^{b}\mu^{c}$, $\Sigma\mu^{a}\mu^{b}\mu^{c}\mu^{e}$, ec. esprimano le combinazioni per via di moltiplicazione a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, ec. di tutte le potenze *aesime*, *besime*, *cesime*, *eesime*, ec. delle radici della Equazione $\mu^{k} = 1$, dalla Teorica delle Equazioni sappiamo dover essere

$\Sigma\mu^a\mu^b = \Sigma\mu^a\Sigma\mu^b - \Sigma\mu^{a+b}$,

$\Sigma\mu^a\mu^b\mu^c = \Sigma\mu^a\Sigma\mu^b\mu^c - \Sigma\mu^b\mu^{c+a} - \Sigma\mu^c\mu^{b+a}$,

$\Sigma\mu^a\mu^b\mu^c\mu^e = \Sigma\mu^a\Sigma\mu^b\mu^c\mu^e - \Sigma\mu^b\mu^c\mu^{e+a} - \Sigma\mu^b\mu^e\mu^{c+a} - \Sigma\mu^c\mu^e\mu^{b+a}$,

ec.

Dunque, posto ciascuno degli esponenti a, b, c, e, ec. $< k$, è facile a vedersi pel (prec. 1.°) che risulterà

$\Sigma\mu^a\mu^b = -\Sigma\mu^{a+b}$,

$\Sigma\mu^a\mu^b\mu^c = 2\Sigma\mu^{a+b+c}$

$\Sigma\mu^a\mu^b\mu^c\mu^e = -2.3\Sigma\mu^{a+b+c+e}$,

e in generale che, supposto r il numero degli esponenti a, b, c, e, f ec. risulterà

$\Sigma\mu^a\mu^b\mu^c\mu^e\mu^f \ldots = \pm 1.2.3.4\ldots(r-1)\Sigma\mu^{a+b+c+e+f+\cdots}$,

prendendosi il segno $+$ quando r è dispari, il segno $-$, quando r è pari. Potendo poi la somma $a+b+c+e+f+$ ec. essere multipla di k, e non esserlo; quindi otterremo in fine nel secondo degli esposti casi

$\Sigma\mu^a\mu^b\mu^c\mu^e\mu^f \ldots = 0$,

e nel primo

$\Sigma\mu^a\mu^b\mu^c\mu^e\mu^f \ldots = \pm 1.2.3.4\ldots(r-1)k$ (prec. 1.°).

3.° Allorchè si voglia $a = b$, e gli altri numeri c, e, f, ec. si vogliano diversi; dovendo, come si sa dalla Teorica delle Equazioni, il valore di $\Sigma\overline{\mu\mu}^a\mu^c\mu^e\mu^f\ldots$ uguagliare quello, che si è già trovato, diviso per 2; ne segue, che dovrà essere

$\Sigma\overline{\mu\mu}^a\mu^c\mu^e\mu^f\ldots = 0$, oppure

$\Sigma\overline{\mu\mu}^a\mu^c\mu^e\mu^f\ldots = \pm\frac{1.2.3\ldots(r-1)k}{2}$, secondochè $2a+c+e+f+$ ec. non è, od è multiplo di k. Così, mentre abbiasi $a = b = c$, oppure $a = b = c = e$, ec., vedremo, che, restando sempre ciascuna delle somme Σ, che risultano, $= 0$, ogniqualvolta la somma degli esponenti non sia multipla di k; ogniqualvolta poi tal somma d'esponenti sia molteplice di k, si avrà

$\Sigma\overline{\mu\mu\mu}^a\mu^e\mu^f . = \pm\frac{1.2.3\ldots(r-1)k}{2.3}$,

$\Sigma\overline{\mu\mu\mu\mu}^{a}\mu^{f}\ldots=\pm\frac{1.2.3\ldots(r-1)k}{2.3.4}$,

e così di seguito.

4.° Poichè si ha $\mu^{gk+a}=\mu^{gk}\times\mu^{a}=\mu^{a}$; apparisce, che, se si ha l' espressione $\Sigma\mu^{h'}\mu^{h''}\mu^{h'''}\ldots$, nella quale sia $h'=g'k+a$, $h''=g''k+b$, $h'''=q'''k+c$, ec., sarà ancora $\Sigma\mu^{h'}\mu^{h''}\mu^{h'''}\ldots=\Sigma\mu^{a}\mu^{b}\mu^{c}\ldots$; e quindi apparisce, che la supposizione degli esponenti a, b, c, ec. non $>k$ comprende ancora tutti gli altri casi, ne' quali tali esponenti si possono supporre $>k$.

5.° Ritenuto ciascuno dei precedenti numeri b, c, e, f, ec. $<k$, e fra loro disuguali, sia il primo $a=k$. Non potremo in questo caso porre tostamente il termine
$\Sigma\mu^{a}\Sigma\mu^{b}\mu^{c}\mu^{e}\mu^{f}\ldots=0$, giacchè non si ha $\Sigma\mu^{a}=\Sigma\mu^{k}=0$ (prec. 1.°). Avendosi però $\Sigma\mu^{k}=k$, $\Sigma\mu^{b}\mu^{c}\mu^{c}\mu^{f}\ldots=$
$\mp 1.2.3\ldots(r-2)\Sigma\mu^{b+c+e+f+\cdots}$ (prec.[i] 1.°, 2.°), ne verrà
$\Sigma\mu^{k}\mu^{b}\mu^{c}\mu^{e}\mu^{f}\ldots=\pm 1.2.3.4\ldots(r-1)\Sigma\mu^{k+b+c+e+f+\cdots}$
$\mp 1.2.3\ldots(r-2)k\Sigma\mu^{b+c+e+f+\cdots}$, e per conseguenza, se non è la somma $b+c+e+f+$ ec. multipla di k, sarà ancora in questa ipotesi $\Sigma\mu^{k}\mu^{b}\mu^{c}\mu^{e}\mu^{f}\ldots=0$, e se l'accennata somma è multipla di k risulterà
$\Sigma\mu^{k}\mu^{b}\mu^{c}\mu^{e}\mu^{f}\ldots=\pm(1.2.3.4\ldots(r-1)k-1.2.3\ldots(r-2)k^{2})$
$=\pm(1.2.3.4\ldots(r-1-k)k)$.

In questa supposizione se abbiasi inoltre $b=c$, oppure $b=c=e$, ec. ovvero $b=c$, $e=f$, ec., pel (prec. 3.°) risulterà in corrispondenza ......

$\Sigma\mu^{k}\mu\mu^{b}\mu^{e}\mu^{f}\ldots=\ldots\ldots$

$=\pm\frac{1}{2}\times 1.2.3.4\ldots(r-2)(r-1-k)k$,

$\Sigma\mu^{k}\overline{\mu\mu\mu}^{b}\mu^{f}\ldots=\ldots\ldots$

$=\pm\frac{1}{2.3}\times 1.2.3.4\ldots(r-2)(r-1-k)k$,

ec.

$\Sigma\mu^{k}\overline{\mu\mu}^{b}\overline{\mu\mu}^{e}\ldots=$

$=\pm\frac{1}{2.2}\times 1.2.3.4\ldots(r-2)(r-1-k)k$

ec.

6.° Per semplicità di scrivere denominiamo $\pm F^{(r)}$ il valore della $\Sigma\mu^k\overline{\mu\mu}^c\mu^e\mu^f\ldots$ trovato nel (prec. 5.°); e posto $a=b=k$; c, e, f, ec. $<k$, vogliasi il valore della $\Sigma\overline{\mu\mu}^k\mu^c\mu^e\mu^f\ldots$ nella solita supposizione, che la somma degli esponenti sia multipla di k; perchè altrimenti si troverebbe essa $\Sigma\overline{\mu\mu}^k\mu^c\mu^e\mu^f\ldots=0$. Pei (prec. 1.°, 3.°) si ha

$\Sigma\overline{\mu\mu}^k\mu^c\mu^e\mu^f\ldots=\frac{1}{2}(\Sigma\mu^k\Sigma\mu^k\mu^c\mu^e\mu^f\ldots-\Sigma\mu^k\mu^c\mu^e\mu^{f+k}\ldots-\Sigma\mu^k\mu^c\mu^f\mu^{e+k}$ $-\Sigma\mu^k\mu^e\mu^f\mu^{c+k}\ldots-\Sigma\mu^c\mu^e\mu^f\mu^{2k}-\text{ec.})$: inoltre pel (prec. 4.°) abbiamo $\Sigma\mu^k\mu^c\mu^e\mu^f\ldots=\Sigma\mu^k\mu^c\mu^e\mu^{f+k}\ldots=\Sigma\mu^k\mu^c\mu^f\mu^{e+k}\ldots=\text{ec.}$, e pel (prec. 5.°) essendo $r-1$ il numero degli esponenti della $\Sigma\mu^k\mu^c\mu^e\mu^f\ldots$ abbiamo essa

$\Sigma\mu^k\mu^c\mu^e\mu^f\ldots=\mp F^{(r-1)}$. Dunque sostituendo otterremo $\Sigma\overline{\mu\mu}^k\mu^c\mu^e\mu^f\ldots=\mp\frac{1}{2}(kF^{(r-1)}-F^{(r-1)}-F^{(r-1)}-F^{(r-1)}-F^{(r-1)}-\text{ec.})$; ma $F^{(r-1)}=1.2.3\ldots(r-3)(r-2-k)k$ (prec. 5°), e nel trovato valore di $\Sigma\overline{\mu\mu}^k\mu^c\mu^e\mu^f\ldots$ questa $F^{(r-1)}$ viene evidentemente sottratta da $kF^{(r-1)}$ le volte $r-1$, onde si ha $\Sigma\overline{\mu\mu}^k\mu^c\mu^e\mu^f\ldots=\pm\frac{1}{2}(kF^{(r-1)}-(r-1)F^{(r-1)})=\pm\frac{1}{2}(r-1-k)F^{(r-1)}$. Dunque sostituendo otterremo

$\Sigma\overline{\mu\mu}^k\mu^c\mu^e\mu^f\ldots=\pm\frac{1}{2}\times1.2.3.4\ldots(r-3)(r-2-k)(r-1-k)k$.

Se qui ancora si avesse $c=e$, oppure $c=e=f$, ec.; si otterrebbe il valore delle espressioni

$\Sigma\overline{\mu\mu}^k\overline{\mu\mu}^c\mu^f\ldots$, $\Sigma\overline{\mu\mu}^k\overline{\mu\mu\mu}^c\ldots$ ec., dividendo il trovato valore $\pm\frac{1}{2}\times1.2.3.4\ldots(r-3)(r-2-k)(r-1-k)k$ rispettivamente per 2, per 2.3, ec.

7.° Supposto $\frac{1}{2}\times1.2.3.4\ldots(r-3)(r-2-k)(r-1-k)k=F_1^{(r)}$, vogliasi

$a=b=c=k$; e, f, ec. $<k$. Essendo

$\Sigma\overline{\mu\mu\mu}^k\mu^e\mu^f\ldots=\frac{1}{3}(\Sigma\mu^k\Sigma\overline{\mu\mu}^k\mu^e\mu^f\ldots-\Sigma\overline{\mu\mu}^k\mu^e\mu^{f+k}\ldots-\Sigma\overline{\mu\mu}^k\mu^f\mu^{e+k}\ldots$ $-2\Sigma\mu^k\mu^e\mu^f\mu^{2k}\ldots-\text{ec.})$, ed essendo $\Sigma\mu^k\mu^e\mu^f\mu^{2k}\ldots=\Sigma\mu^k\mu^e\mu^f\mu^k\ldots$ (prec. 4.°) $=\Sigma\overline{\mu\mu}^k\mu^e\mu^f\ldots$, con un discorso perfettamente uguale a quello del (prec. 6.°) vedremo risultarci

$\Sigma\overline{\mu\mu\mu}^k\mu^e\mu^f\ldots=\pm\frac{1}{3}(r-1-k)F_1^{(r-1)}$; dunque, collocato

nel precedente valore di $F_1^{(r)}$ il numero $r-1$ in vece dell' altro r, onde ottenere il valore di $F_1^{(r-1)}$, ne verrà,

$$\Sigma\overline{\mu\mu\mu}^k\mu^e\mu^f\ldots=\pm\frac{1}{2.3}\times 1.2.3.4\ldots(r-4)(r-3-k)(r-2-k)(r-1-k)k.$$

Questo valore poi dovrà pel (prec. 3.°) dividersi per 2, per 2.3 ec., se mai si voglia ancora $e=f$, $e=f=g$, ec.

8.° Con maniere affatto uguali a quelle de' (prec^i 6°, 7.°) troveremo dover essere

$$\Sigma\overline{\mu\mu\mu\mu}^k\mu^f\ldots=\pm\frac{1}{2.3.4}\times 1.2.3.4\ldots(r-5)(r-4-k)(r-3-k)(r-2-k)$$
$$\times(r-1-k)k,$$

$$\Sigma\overline{\mu\mu\mu\mu\mu}^k\mu^g\ldots=\pm\frac{1}{2.3.4.5}\times 1.2.3.4\ldots(r-6)(r-5-k)\ldots(r-1-k)k;$$

e in generale, allorchè il numero degli esponenti a, b, c, ec. che uguagliano k, è q, il valore della somma Σ sarà

$$\pm\frac{1}{2.3.4\ldots q}\times 1.2.3\ldots(r-(q+1))(r-q-k)(r-(q-1)-k)(r-(q-2)$$
$$-k)\ldots(r-1-k)k. \qquad \text{(XXX)}$$

9.° Conviene quivi riflettere primieramente che se si vuole $q>r-2$; dovrà essere $q=r$, affinchè la somma Σ risulti uguale al trovato valore (XXX). Di fatti se si volesse $q=r-1$, allora la somma degli r esponenti $a+b+c+e+f+\ldots$ non potrebbe più essere multipla di k, e quindi per ciò, che si è detto più volte, si avrebbe $\Sigma=0$, e non già $\Sigma=$ (XXX).

10.° In secondo luogo i fattori 1, 2, 3, 4, ec. $r-(q+2)$, $r-(q+1)$, $r-q$, $r-(q-1)$, $r-(q-2)$ ec. nel numeratore del risultato (XXX) deggiono pel modo, con cui sonosi formati (prec.^{i} 2.°, 5.° ec.) essere tutti positivi, cominciare dallo 1, e progredire secondo la serie dei numeri naturali fino al numero $r-1$. Quindi se mai si vuole per esempio $q=r-3$, oppure $q=r-2$, converrà cominciare rispettivamente dai termini $r-(q+2)$, $r-(q+1)$, perchè son essi, che nelle supposizioni fatte divengono $=1$. Che se si volesse $q=r$,

allora non diventando $=1$ che $r-(q-1)$, devonsi trascurare tutti gli anteriori, cominciare dal termine $(r-(q-1)-k)$, e progredire innanzi. Sia per esempio $r=7$, $q=3$, ne verrà $\Sigma=+\frac{1}{2.3}\times 1.2.3.(4-k)(5-k)(6-k)k$. Sia $r=6=q$, avremo

$$\Sigma=-\frac{1}{2.3.4.5.6}(1-k)(2-k)(3-k)(4-k)(5-k)k.$$

In generale nel caso di $q=r$, il precedente valore (XXX) diverrà $\pm\left(\frac{(1-k)(2-k)(3-k)\ldots(r-1-k)k}{2.3.4\ldots r}\right)$; ma il numeratore di questa frazione è $=\pm k(k-1)(k-2)(k-3)\ldots(k-(r-1))$, prendendosi il segno $+$, quando r è dispari, il $-$, quando r è pari. Dunque sostituendo otterremo

$$\Sigma\overline{\mu\mu\mu\mu\mu\ldots}^{\,k}=\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)\ldots(k-(r-1))}{2.3.4\ldots r}.$$

Che se si voglia $r=k$; allora nel caso che ancora q sia $=r$, da quest' ultima formola apparisce, che il valore della nostra somma Σ diviene $=1$; nel caso poi di $q<r-1$ (prec. 9.°), dalla (XXX) ottenendosi

$$\Sigma=\pm\frac{1}{2.3\ldots q}\times 1.2.3\ldots(k-(q+1))\times -q\times-(q-1)\times-(q-2)\times\ldots$$
$$\times-2\times-1.k$$
$$=\pm k\,1.2.3\ldots(k-(q+1))\times\mp\frac{1.2.3\ldots q}{1.2.3\ldots q}$$

col prendersi in quest' ultima frazione il segno superiore, quando q è dispari, l' inferiore quando q è pari, ne verrà
$\Sigma=\pm k\times\mp 1.2.3\ldots(k-(q+1))$,
prendendo il segno superiore nel primo luogo, allorchè k è dispari, l' inferiore quando k è pari (prec. 2.°), e nel luogo secondo prendendo il segno di sopra, o quello di sotto, secondochè è dispari o pari il numero q.

34. Passiamo presentemente alla soluzione del Problema propostoci nel (n.° 33), e

1.° Cominciamo dal supporre nel (n.° 31) $k=m$, $p=m-1$, esprimendosi da m il grado dell'Equazione data (n.° 1): In questa

supposizione avremo $\beta = \frac{k-1}{k} = \frac{m-1}{m}$, ed i $k=m$ valori (XXVIII) (n.° 31) tutti rappresenteranno i valori di y nella Equazione (III). Dunque per la chiesta determinazione dei valori delle Σy_1, Σy_2, Σy_3, Σy_4, ec. (n.° 33) non si dovranno che combinare fra loro opportunamente i citati valori (XXVIII), osservando, 1.° che nel caso presente deve in ogni luogo cambiarsi k in m; 2.° che avendosi $\mu^k = \mu^m = 1$, ed 1, μ', μ'', μ''', ec. $\mu^{(k-1)} = \mu^{(m-1)}$, essendo le radici di questa $\mu^m = 1$ (n.° 31), potremo immaginare, che la X nel valore di y' sia moltiplicata per 1 nel valore di y'' sia moltiplicata per μ'^m, in quello di y''' per μ''^m, in quello di $y^{\prime v}$ per μ'''^m, e così di seguito; e 3.° che dobbiamo tenere conto delle proprietà riguardanti le radici dell' unità, che sonosi determinate nei (1.°, 2.°, ec. 10.° n.° prec.).

Poichè in conseguenza delle esposte relazioni fra le somme dei diversi prodotti a due a due, a tre, a tre, a quattro a quattro, ec., che nella ricerca dei valori delle Σy_1, Σy_2. Σy_3, Σy_4, ec. risultano tra le quantità $X = \mu^m X$, $\mu^{m-1} X'$, $\mu^{m-2} X''$, $\mu^{m-3} X'''$, ec. non rimangono, che quelle, nelle quali la somma degli esponenti sulle μ', μ'', μ''', ec. è multipla di m, giacchè le altre sono tutte $= 0$ (1.°, 2.°, ec. n.° prec.); e poichè quando l'accennata somma di esponenti è multipla di m, lo è ancora la somma dei prodotti, che si ottengono moltiplicando i numeri, che esprimono gli apici sopra le X', X'', X''', $X^{\prime v}$, ec. con gli esponenti esistenti sopra le X', X'', X''', X^v, ec. medesime, come apparisce dall'andamento degli esponenti sopra le μ, e da quello degli apici sulle X nelle (XXVIII); ne segue che avremo

$$\Sigma y = m X,$$

$$\Sigma y_2 = \frac{m(m-1)}{2} X^2 - m \left(\Sigma X^{(a)} X^{(b)} + \frac{X^{\left(\frac{m}{2}\right)} X^{\left(\frac{m}{2}\right)}}{2} \right),$$

ove gli apici (a), (b) devono essere tali, che sia la somma $a+b=m$, ed il termine ultimo

$-\frac{X^{\left(\frac{m}{2}\right)}X^{\left(\frac{m}{2}\right)}}{2}$ esiste soltanto, mentre sia m numero pari.

$$\Sigma y_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.}X^3+(2-m)mX\left(\Sigma X^{(a)}X^{(b)}+\frac{X^{\left(\frac{m}{2}\right)}X^{\left(\frac{m}{2}\right)}}{2}\right)+$$

$$2m\left(\Sigma X^{(a')}X^{(b')}X^{(c')}+\frac{\Sigma X^{(a'')2}X^{(b'')}}{2}+\frac{X^{\left(\frac{m}{3}\right)}X^{\left(\frac{m}{3}\right)}X^{\left(\frac{m}{3}\right)}}{2.3}\right),$$

dove gli apici deggiono essere tali, che si abbia $a+b=m$; $a'+b'+c'=m$, oppure $=2m$; $2a''+b''=m$, oppure $=2m$, e quindi $m-b''$, o $2m-b''$ in corrispondenza divisibili esattamente per 2; e finalmente il termine $\frac{X^{\left(\frac{m}{2}\right)}X^{\left(\frac{m}{2}\right)}}{2}$ esiste solo quando m è divisibile esattamente per 2, e l' altro $\frac{X^{\left(\frac{m}{3}\right)}X^{\left(\frac{m}{3}\right)}X^{\left(\frac{m}{3}\right)}}{2.3}$, allorchè m è divisibile esattamente per 3.

$$\Sigma y_4=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4.}X^4-\frac{(2-m)(3-m)m}{2}X^2\left(\Sigma X^{(a)}X^{(b)}+\frac{X^{\left(\frac{m}{2}\right)}X^{\left(\frac{m}{2}\right)}}{2.}\right)$$

$$-2(3-m)mX\left(\Sigma X^{(a')}X^{(b')}X^{(c')}+\frac{\Sigma X^{(a'')2}X^{(b'')}}{2}+\frac{X^{\left(\frac{m}{3}\right)}X^{\left(\frac{m}{3}\right)}X^{\left(\frac{m}{3}\right)}}{2.3}\right)-$$

$$-2.3m\left(\Sigma X^{(a''')}X^{(b''')}X^{(c''')}X^{(e''')}+\frac{\Sigma X^{(a^{iv})2}X^{(b^{iv})}X^{(c^{iv})}}{2}+\frac{\Sigma X^{(a^{v})2}X^{(b^{v})2}}{2.2}+\frac{\Sigma X^{(a^{vi})3}X^{(b^{vi})}}{2.3}\right.$$

$$\left.+\frac{X^{\left(\frac{m}{4}\right)}X^{\left(\frac{m}{4}\right)}X^{\left(\frac{m}{4}\right)}X^{\left(\frac{m}{4}\right)}}{2.3.4}\right)$$ dove deve essere $a+b=m$; $a'+b'$ $c'=m$, ovvero $=2m$; $2a''+b''=m$, ovvero $=2m$, e però $m-b''$, o $2m-b''$ divisibile esattamente per 2; $a'''+b'''+c'''+e'''=m$, oppure $=2m$, oppure $3m$; così ciascuna delle somme $2a^{iv}+b^{iv}+c^{iv}$, $2a^{v}+2b^{v}$, $3a^{vi}+b^{vi}=m$, ovvero $=2m$, oppure $=3m$, e quindi nel primo di questi tre casi

$m - (b'^v + c'^v)$, o $2m - (b'^v + c'^v)$, o $3m - (b'^v + c'^v)$, e nel secondo $m - 2b^v$, o $2m - 2b^v$, o $3m - 2b^v$ deggiono essere rispettivamente divisibili per 2; e nel caso terzo dovranno essere divisibili corrispondentemente per 3 i valori $m - b^{v'}$, o $2m - b^{v'}$, o $3m - b^{v'}$. Infine i termini $\frac{X^{\left(\frac{m}{2}\right)} X^{\left(\frac{m}{2}\right)}}{2}$,

$\frac{X^{\left(\frac{m}{3}\right)} X^{\left(\frac{m}{3}\right)} X^{\left(\frac{m}{3}\right)}}{2.3}$, $\frac{X^{\left(\frac{m}{4}\right)} X^{\left(\frac{m}{4}\right)} X^{\left(\frac{m}{4}\right)} X^{\left(\frac{m}{4}\right)}}{2.3.4}$ esisteranno soltanto, allorquando sia m divisibile in corrispondenza esattamente per 2, per 3, per 4.

Così in progresso.

Sia per esempio $m = 4$, ne verrà

$$\Sigma y = 4X,$$

$$\Sigma y_2 = 6X^2 - 4\left(X'X''' + \frac{X''X''}{2}\right),$$

$$\Sigma y_3 = 4X^3 - 8X\left(X'X''' + \frac{X''X''}{2}\right) + 8\left(\frac{X'^2X''}{2} + \frac{X'''^2X''}{2}\right),$$

$$\Sigma y_4 = X^4 - 4X^2\left(X'X''' + \frac{X''X''}{2}\right) + 8X\left(\frac{X'^2X''}{2} + \frac{X'''^2X''}{2}\right)$$
$$- 24\left(\frac{X''^2X'X'''}{2.3.} + \frac{X'^2X'''^2}{2.2} + \frac{X'^4}{2.3.4}\right),$$

ec.

Sia in secondo luogo $m = 5$, otterremo perciò

$$\Sigma y = 5X,$$

$$\Sigma y_2 = 10X^2 - 5(X'X'^v + X''X'''),$$

$$\Sigma y_3 = 10X^3 - 15X(X'X'^v + X''X''') + 10\left(\frac{X'^2X'''}{2} + \frac{X'''^2X'^v}{2} + \frac{X''^2X'}{2} + \frac{X'^{v2}X''}{2}\right),$$

$$\Sigma y_4 = 5X^4 - 15X^2(X'X'^v + X''X''') + 20X\left(\frac{X'^2X'''}{2} + \frac{X''^2X'}{2} + \frac{X'''^2X'^v}{2} + \frac{X'^{v2}X''}{2}\right) -$$

$$-30\left(\frac{X'^2X'^{v2}}{2.2}+\frac{X''^2X'''^2}{2.2}+\frac{X'^3X''}{2.3}+\frac{X''^3X'^v}{2.3}+\frac{X'''^3X'}{2.3}+\frac{X'^{v3}X'''}{2.3}\right),$$

ec.

2.° Sia $k < m$, e gli altri $m-k$ valori di y, che in questo caso rimangono oltre i (XXVIII), siano tutti semplici e siano essi i seguenti

$$\text{(XXXII)}\quad \begin{aligned} y^{(k+1)} &= L''x + M'' + N''x^{-1} + P''x^{-2} + Q''x^{-3} + \text{ec.}, \\ y^{(k+2)} &= L'''x + M''' + N'''x^{-1} + P'''x^{-2} + Q'''x^{-3} + \text{ec.}, \\ y^{(k+3)} &= L'^vx + M^v + N'^vx^{-1} + P'^vx^{-2} + Q'^vx^{-3} + \text{ec.}, \end{aligned}$$

ec.

Denominati Y', Y'', Y''', Y'^v, ec. $Y^{(k)}$, i valori (XXVIII), e Z', Z'', Z''' ec. i (XXXII), poichè risulta $y'=Y'$, $y''=Y''$, $y'''=Y'''$, $y'^v=Y'^v$, ec. $y^{(k)}=Y^{(k)}$, $y^{(k+1)}=Z'$, $y^{(k+2)}=Z''$, $y^{(k+3)}=Z'''$, ec, $y^{(m)}=Z^{(m-k)}$, è chiaro, che ne verrà

$$\begin{aligned} \Sigma y &= \Sigma Y + \Sigma Z, \\ \Sigma y_2 &= \Sigma Y_2 + \Sigma Y \Sigma Z + \Sigma Z_2, \\ \Sigma y_3 &= \Sigma Y_3 + \Sigma Y_2 \Sigma Z + \Sigma Y \Sigma Z_2 + \Sigma Z_3; \\ \Sigma y_4 &= \Sigma Y_4 + \Sigma y_3 \Sigma Z + \Sigma Y_2 \Sigma Z_2 + \Sigma Y \Sigma Z_3 + \Sigma Z_4, \end{aligned}$$

ec.

3.° Finalmente supponghiamo, che nella Equazione (III), oltre i k valori (XXVIII) ne esistano altri k_1, e poi altri k_2, ec. tutti della natura dei citati (XXVIII) cosicchè nel modo medesimo come lo è $\frac{p}{k}$ (n.[i] 18, 27, 31) siano valori di β anche le frazioni $\frac{p'}{k_1}$, $\frac{p''}{k_2}$, ec. e oltre questi in fine esistano eziandio $m-(k+k_1+k_2+\text{ec.})$ valori semplici, quali sono

i (XXXII). Chiamati in questo caso $V', V'', V''', ec. V^{(k)}$ i valori di y, che corrispondono a $\beta = \frac{p'}{k_1}$, chiamati U', U'', U''', ec. $U^{(k)}$ i valori di y corrispondenti a $\beta = \frac{p''}{k_2}$, e così di seguito, e ritenute pei valori (XXVIII), e per gli ultimi $m - (k + k_1 + k_2 + \text{ec.})$ valori semplici le denominazioni del (prec. 2.°) otterremo evidentemente

$$\Sigma y = \Sigma Y + \Sigma V + \Sigma U + \text{ec.} + \Sigma Z,$$

$$\Sigma y_2 = \Sigma Y_2 + \Sigma Y(\Sigma V + \Sigma U + \text{ec.} + \Sigma Z) + \Sigma V_2 + \Sigma V(\Sigma U + \text{ec.} + \Sigma Z) + \Sigma U_2 + \Sigma U(\text{ec.} + \Sigma Z) + \text{ec.} + \Sigma Z_2,$$

$$\Sigma y_3 = \Sigma Y_3 + \Sigma Y_2(\Sigma V + \Sigma U + \text{ec.} + \Sigma Z) + \Sigma Y(\Sigma V_2 + \Sigma V(\Sigma U + \text{ec.} + \Sigma Z) + \Sigma U_2 + \Sigma U(\text{ec.} + \Sigma Z) + \text{ec.} + \Sigma Z_2) + \Sigma V_3 + \Sigma V_2(\Sigma U + \text{ec.} + \Sigma Z) + \Sigma V(\Sigma U_2 + \Sigma U(\text{ec.} + \Sigma Z) + \text{ec.} + \Sigma Z_2) + \Sigma U_3 + \Sigma U_2(\text{ec.} + \Sigma Z) + \Sigma U(\text{ec.} + \Sigma Z_2) + \text{ec.} + \Sigma Z_3, \quad \text{(XXXIV)}$$

$$\Sigma y_4 = \Sigma Y_4 + \Sigma Y_3(\Sigma V + \Sigma U + \text{ec.} + \Sigma Z) + \Sigma Y_2(\Sigma V_2 + \Sigma V(\Sigma U + \text{ec.} + \Sigma Z) + \Sigma U_2 + \Sigma U(\text{ec.} + \Sigma Z) + \text{ec.} + \Sigma Z_2) + \Sigma Y(\Sigma V_3 + \Sigma V_2(\Sigma U + \text{ec.} + \Sigma Z) + \Sigma V(\Sigma U_2 + \Sigma U(\text{ec.} + \Sigma Z) + \text{ec.} + \Sigma Z_2) + \Sigma U_3 + \Sigma U_2(\text{ec.} + \Sigma Z) + \text{ec.} + \Sigma U(\text{ec.} + \Sigma Z_2) + \text{ec.} + \Sigma Z_3) + \Sigma V_4 + \Sigma V_3(\Sigma U + \text{ec.} + \Sigma Z) + \Sigma V_2(\Sigma U_2 + \Sigma U(\text{ec.} + \Sigma Z) + \text{ec.} + \Sigma Z_2) + \Sigma V(\Sigma U_3 + \Sigma U_2(\text{ec.} + \Sigma Z) + \Sigma U(\text{ec.} + \Sigma Z_2) + \text{ec.} + \Sigma Z_3) + \Sigma U_4 + \Sigma U_3(\text{ec.} + \Sigma Z) + \Sigma U_2(\text{ec.} + \Sigma Z_2) + \Sigma U(\text{ec.} + \Sigma Z_3) + \text{ec.} + \Sigma Z_4,$$

ec.

Ottenute così le formole (XXXI), (XXXIII), (XXXIV); si sostituiscano finalmente in luogo delle X, X', X'', ec. i suoi valori esistenti nella (XXVII) (n.° 31), in luogo delle Z', Z'', Z''', ec. i rispettivi valori (XXXII), e così di seguito, e per tal modo otterremo in tutti i casi la soluzione del proposto Problema (n.° 33).

35. Paragonando i valori delle Σy_1, Σy_2, ec. ottenuti nel (n.° prec.) con i valori $-\left(\frac{a^{(m-1)}}{a^{(m)}}x+\frac{b^{(m-1)}}{a^{(m)}}\right)$, $\left(\frac{a^{(m-2)}}{a^{(m)}}x^2+\frac{b^{(m-2)}}{a^{(m)}}x+\frac{c^{(m-2)}}{a^{(m)}}\right)$, ec. delle stesse Σy_1, Σy_2, ec. (n.° 10), ricaveremo quì pure, come si è fatto nel cit.° (n.° 10), tante Equazioni tra i coefficienti delle varie potestà della x nelle precedenti funzioni Y, V, U, ec. Z ed i coefficienti delle podestà medesime nella (III) (n.° 1); e facendo in seguito su di queste Equazioni delle riflessioni, come si è praticato nei (n.^{i} 11., 14), ritrarremo quanto nel seguente (n.° 36).

Siccome poi tanto nelle Z, quanto nelle Y, nelle V, ec. i coefficienti delle varie potenze della x vengono espresse con le medesime lettere L, M, N, ec., e siccome dovremo indicare le somme delle combinazioni fra i coefficienti delle Z separatamente dalle combinazioni medesime fra i coefficienti delle Y, V, U, ec.; per maggiore semplicità e chiarezza porremo, che per indicare le accennate somme delle combinazioni fra i soli coefficienti delle Z si faccia uso del segno $\Sigma^{(Z)}$, cosicchè $\Sigma^{(Z)}$ N esprime la somma di tutti i coefficienti N'', N''', ec., che esistono nei valori (XXVII) (n.° 34), ossia nelle Z, e $\Sigma^{(Z)}$LP esprime la somma di tutti i prodotti fra i coefficienti L, ed i P delle Z, ossia delle (XXVII), e così degli altri casi.

36. Ricerchiamo ora di determinare le conseguenze, che abbiamo accennate nel (n.° prec.) in generale, e

1.° Si abbia $k = m$, ossia succeda il primo dei casi del (n.° 34). Risultando $\Sigma y = mX$, ed essendo nel tempo stesso $\Sigma y = -\left(\frac{a^{(m-1)}}{a^{(m)}} x + \frac{b^{(m-1)}}{a^{(m)}}\right)$, ne verrà $L' = -\frac{a^{(m-1)}}{ma^{(m)}}$, $M' = -\frac{b^{(m-1)}}{ma^{(m)}}$, e tutti gli altri coefficienti N', P', Q', ec., che dovrebbero esistere nella X (n.° 31), saranno zero; onde nella ipotesi di $k = m$ avremo $X = -\frac{a^{(m-1)} x + b^{(m-1)}}{ma^{(m)}}$.

2.° Nella ipotesi medesima, nella quale si vuole, che il primo esponente fratto, che nella serie (I) esiste sulla x, abbia per denominatore m, dovrà tale esponente essere β nel termine Mx^{β}, e non potrà esso avere, che uno dei valori $\frac{m-1}{m}$, $\frac{m-2}{m}$, ec. $\frac{1}{m}$. Difatti abbiamo già $\alpha = 1$ (n.° 3), ed essendo $k = m$, e però $= n$ (n.^{i} 18, 15), l' esponente β pel (n.° 28) dovrà avere soltanto uno dei valori $\frac{m-1}{m}$, $\frac{m-2}{m}$, ec. $\frac{1}{m}$, $\frac{0}{m} = 0$. Ora aggiungo non potere nel caso presente essere $\beta = 0$; perchè se lo fosse, il primo esponente realmente fratto non sarebbe più β, ma $\gamma = \frac{q}{k'}$ (n.° 30), ed allora dovendo per la ipotesi essere $k' = m$, ne verrebbe $m = n = h = l = k'$ (n.^{i} 29, 30), e quindi pei (3.°, 4.° n.° 30), il più piccolo valore di γ sarebbe lo zero, ma ciò non può essere, perchè il valore di γ non può essere $> -\frac{1}{m}$, essendo già $\beta = \frac{0}{m}$. Dunque risultando assurdo il valore di γ corrispondente a $\beta = 0$ (5.° n.° 33); ne segue, che non potrà neppure essere $\beta = \frac{0}{m} = 0$, e quindi

che β non può ottenere che uno dei citati valori $\frac{m-1}{m}$, $\frac{m-2}{m}$, ec. $\frac{1}{m}$.

Dunque, mentre si vuole $k=m$, uno per lo meno dei coefficienti L'_1, L'_2, L'_3, ec. $L'_{(k-1)}$ nella (XXVII) dovrà essere diverso dallo zero; e se mai nella (I) si volesse β non >0, dovrà essere necessariamente $k<m$.

3.° Supposto $k<m$, vogliasi, che abbia luogo il 2.° dei casi del (n.° 34), e che debba essere $\frac{p}{k}<-1$. Poichè nel valore di y, che corrisponde a $\beta=\frac{p}{k}$, la differenza costante, con cui vanno decrescendo i successivi esponenti della x, come apparisce dal valore di y, che è esposto nel (n.° 31.), è $\frac{1}{k}$; ne segue, che dovendo essere $\frac{p}{k}<-1$, il valore più grande, che potrà acquistare questo esponente $\frac{p}{k}$, sarà $-1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}-2$. Dunque nella (XXVII) dovranno essere zero tutti i coefficienti L'_1, L'_2, L'_3, ec. $L'_{(k-1)}$, M'_1, M'_2, M'_3, ec. $M'_{(k-1)}$, ed il coefficiente N'. Ora dalla Equazione $\Sigma y=kX+\Sigma Z$ (2.° n.° 32) apparisce, che il coefficiente della potenza x^{-1} in generale è $kN'+\Sigma^{(Z)}N$, e nel caso presente, per essere $N'=0$, diventa $\Sigma^{(Z)}N$, e dall' Equazione $\Sigma y= kX+\Sigma Z=-\left(\frac{a^{(m-1)}}{a^{(m)}}x+\frac{b^{(m-1)}}{a^{(m)}}\right)$ (n.° 35) ritraesi, come nel (n.° 10), dover essere l'esposto coefficiente, e però $\Sigma^{(Z)}N=0$. Dunque applicando quivi il discorso del (I. n.° 14), ritroveremo

quì pure, che i valori di N nelle Z diversi dallo zero, se mai esistono, deggiono essere per lo meno due: questa proprietà per altro esige, che sia $\frac{p}{k} < -1$; perchè, altrimenti, non dovendo essere $N'=0$, non si avrebbe più $\Sigma^{(Z)}N=0$, ma bensì $kN'+\Sigma^{(Z)}N=0$.

4.° Debba essere $\frac{p}{k} < -2$. Il valor più grande per quanto si è detto nel (prec. 3°), che nel caso presente può ricevere $\frac{p}{k}$, essendo $-2-\frac{1}{k}=\frac{(k-1)}{k}-3$; ne viene, che nella (XXVII) deggiono risultare zero tutti i coefficienti L'_1, L'_2, L'_3, ec. $L'_{(k-1)}$, M'_1, M'_2, M'_3 ec. $M'_{(k-1)}$, N', N'_1, N'_2, N'_3, ec. $N'_{(k-1)}$, P'. Ora abbiamo $\Sigma Y=kX$, $\Sigma Y_2=\frac{k(k-1)}{2}X^2$ $-k\left(\Sigma X^{(a)}X^{(b)}+X^{\left(\frac{k}{2}\right)}X^{\left(\frac{k}{2}\right)}\right)$ (1.° n.° 34): dunque per essere zero tutti gli accennati coefficienti, e per la natura delle quantità X, X', X'', ec. (n.° 31), la massima potenza negativa della x, che entra nella ΣY sarà la x^{-3}, e la massima negativa, che entra nella ΣY_2, e nel prodotto $\Sigma Y\Sigma Z$ sarà la x^{-2}; ma pel (2.° n.° 34) si ha $\Sigma y=\Sigma Y+\Sigma Z$, $\Sigma y_2=\Sigma Y_2\Sigma Y+\Sigma Z+\Sigma Z_2$; dunque se nel valore della Σy si vuole, che entrino le potenze x^{-1}, x^{-2}, e nella Σy_2 la x^{-1}, queste non potranno essere somministrate, che dalle ΣZ, ΣZ_2, e somministrate per conseguenza pei (n.i 10, 32) nei termini $x^{-1}\Sigma^{(Z)}N$, $x^{-2}\Sigma^{(Z)}P$, $x^{-1}\Sigma^{(Z)}(LP+MN)$: ma per essere queste potenze negative, e per

aversi $\Sigma y = -\left(\frac{a^{(m-1)}}{a^{(m)}} x + \frac{b^{(m-1)}}{a^{(m)}}\right)$, $\Sigma y_2 = \frac{a^{(m-2)}}{a^{(m)}} x^2 + \frac{b^{(m-2)}}{a^{(m)}} x + \frac{c^{(m-2)}}{a^{(m)}}$ (n.° 35), come nel (cit. n.° 10), si trova dover essere $\Sigma^{(Z)} N = 0$, $\Sigma^{(Z)} P = 0$, $\Sigma^{(Z)}(LP + MN) = 0$. Dunque se mai si voglia, che tutti i valori di N nelle (XXXII) siano zero; nel modo medesimo del (2.° II. n.° 14) troveremo, che i valori di P nelle stesse (XXXII) o saranno di un numero maggiore del due, o non ne esisterà alcuno. Che se non fosse $\frac{p}{k} < -2$; allora potendo sussistere uno, o più dei sovra esposti coefficienti della (XXVII), il precedente discorso non avrà più luogo, e quindi non si verificherà il Teorema ora esposto.

5.° Si richiegga $\frac{p}{k} < -3$. Il valore più grande, che può in questo caso ottenere $\frac{p}{k}$, essendo $-3 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k} - 4$; saranno nella (XXVII) zero tutti i coefficienti L'_1, L'_2, L'_3, ec. $L'_{(k-1)}$, M'_1, M'_2, M'_3, ec. $M'_{(k-1)}$, N', N'_1, N'_2, N'_3, ec. $N'_{(k-1)}$, P', P'_1, P'_2, P'_3, ec. $P'_{(k-1)}$, Q'. Dunque la massima potenza negativa della x, che esiste nella ΣY sarà la x^{-4}, la massima negativa della x, che si contiene nelle ΣY_2, $\Sigma Y \Sigma Z$, sarà la x^{-3}, e la massima negativa della stessa x nelle ΣY_3, $\Sigma Y_2 \Sigma Z$, $\Sigma Y \Sigma Z_2$ sarà la x^{-2}; e per conseguenza le potenze x^{-1}, x^{-2}, x^{-3} nel valore della Σy, le x^{-1}, x^{-2} nel valore della Σy_2, e la x^{-1} nel valore della Σy_3, dalle (XXXIII) apparisce, che nel nostro caso non possono essere somministrate, che dalle ΣZ_1, ΣZ_2, ΣZ_3, e quindi, che i termini, nei quali esse si

contengono, pei (*n.*[i] 32, 10) non possono essere, che i seguenti

$x^{-1}\Sigma^{(Z)}N$, $x^{-2}\Sigma^{(Z)}P$, $x^{-3}\Sigma^{(Z)}Q$ nel valore della Σy,

$x^{-1}\Sigma^{(Z)}(LP+MN)$, $x^{-2}\Sigma^{(Z)}(LQ+MP+N_2)$ nel valore della Σy_2,

$x^{-1}\Sigma^{(Z)}(L_2Q+LMP+M_2N)$ nel valore della Σy ; ma essendo queste potenze negative; a cagione dei valori delle Σy, Σy_2, Σy_3, che si sono accennati nei (n.[i] 10, 32), trovasi dover esser ciascuno dei loro coefficienti $= 0$. Dunque allorchè si supponga, che nelle (XXXII) ciascuno dei valori di N, e ciascuno dei valori di P sia zero; risultandoci le tre Equazioni $\Sigma^{(Z)}Q = 0$, $\Sigma^{(Z)}LQ = 0$ $\Sigma^{(Z)}L_2Q = 0$, con un discorso perfettamente uguale a quello del (III. n.° 14) vedremo che i valori di Q appartenenti alle Z, se non sono tutti zero, deggiono essere necessariamente più di tre. Peraltro come nei (prec.[i] 3.°, 4.°) si vedrà, che questa Proposizione non potrà più asserirsi in generale, allorchè non sia $\frac{p}{k} < -3$.

6.° Nella supposizione, che sia $\frac{p}{k} < -4$, e che nelle (XXXII) siano zero tutti i valori di N, di P, e di Q, con un raziocinio simile affatto ai precedenti, troveremo, che i valori di R nelle stesse (XXXII) dovranno o mancare del tutto, od essere più di quattro. Così in progresso.

7.° Allorchè nelle solite (XXXII) due o più dei valori L'', L''', L^{v}, ec. sono uguali fra loro, vedremo quì pure dover succedere nei Teoremi de' (prec.[i] 4.° 5.° 6.°) quelle variazioni, che nel (n.° 32) si è veduto accadere nei Teoremi del (n.° 14), quando due o più dei valori di L si ponevano tra loro uguali.

8.° Nel caso 3.° del (n.° 34) si verificheranno le proprietà tutte de' (precit. 3.°, 4.°, ec. 7.°) mentre in ciascuna

delle frazioni $\frac{p}{k}$, $\frac{p'}{k_1}$, $\frac{p''}{k_2}$, ec. (3.° n.° 34) abbiano luogo quelle condizioni, che nei citati (prec. 3.°, 4.°, ec. 7.°) si sono supposte riguardo alla sola $\frac{p}{k}$; ed è facile riconoscerne le ragioni, replicando rapporto a tutte le $\frac{p}{k}$, $\frac{p'}{k_1}$, $\frac{p''}{k_2}$, ec. ed alle serie rispettive quanto si è ivi detto relativamente alla $\frac{p}{k}$, ed alla serie corrispondente.

DEL GIRO

DI UN NUMERO QUALUNQUE DI COSE ASSOGGETTATE A CONTINUE PERMUTAZIONI DIPENDENTI DA LEGGI UNIFORMI

MEMORIA

Del Sig. Conte Giovanni Paradisi

Ricevuta li 28 Ottobre 1816.

Sebbene solo frutto della presente ricerca sia quello di appagare la curiosità, mi sono non di meno risoluto di pubblicarla, perchè serve a svelare alcune proprietà delle permutazioni, che nessuno, per quanto io ne so, ha preso per anche ad esaminare, e perchè nella materia delle scienze non v' è trovato alcuno così sterile in apparenza, che col crescersi del tempo e delle cognizioni non possa divenire avvantaggioso e fecondo.

ARTICOLO I.

Dell' ordine primitivo delle leggi d' alterazione, e del modo più semplice di rappresentare le condizioni di questo genere di Problemi.

1. Il Problema del quale intendo di occuparmi si è il seguente. Sieno molte cose A, B, C, D, E, ec. disposte in un ordine qualunque conosciuto. Quest' ordine si alteri con una legge di permutazione qualunque una prima volta. E la nuova disposizione, che acquisteranno si alteri una seconda volta, ma colla stessa legge di prima. Indi si replichi la stessa alterazione una terza, una quarta, una quinta volta ec. sulle varie

disposizioni che le prefate cose andranno via via acquistando, e sempre mai con quella legge medesima di permutazione; ed anzi una tale operazione si ripeta indefinitamente. Io mi propongo di far conoscere il giro di ciascuna, e di tutte quelle cose, continuato quanto si vorrà.

2. Affine che le idee acquistino tutta la chiarezza, e la precisione possibile, occupiamoci di stabilire un modo facile di esprimere quell' ordine, che si vorrà supporre che le cose abbiano da principio, e che d' ora innanzi chiameremo *ordine primitivo*. Rappresentiamo dunque co' numeri romani I, II, III, IV, ec. la serie de' posti ne' quali le cose dovranno trovarsi collocate. Poscia di contro ai medesimi (Tav.[a] I.[a]) notiamo le cose secondo quella disposizione, che vorremo loro attribuire da principio. Per tal modo noi formeremo una doppia colonna di numeri e di lettere che ci darà una idea esattissima della collocazione delle cose da principio.

Per esempio la colonna O ci esprimerà che da principio la cosa A debbe stare in primo posto, la B in secondo, la C in terzo, la D in quarto, la E in quinto: e la colonna O′ ci indicherà che da principio C debb' essere in I°, A in II°, E in III°, D in IV°, e B in V° posto. Fermiamo dunque nella mente che quelle colonne O, O′, sono ciò che in avvenire chiameremo *ordine primitivo* delle cose A, B, C, D, E, ec., e che ordine primitivo non vuol dir altro che la distribuzione de' posti che si vorrà assegnare alle cose prima che s' incomincino a far girare. Chiameremo poi l' ordine O in cui le lettere si succedono secondo la regola dell' alfabeto, *ordine primitivo naturale*, per distinguerlo da qualunque altro O′, ove una così fatta circostanza non ha luogo.

3. Rivolgiamoci addesso ad indagare anche il modo di esprimere quella Legge, che debbe proporsi in ogni problema per regolare la prima, e tutte le altre alterazioni che occorrerà di fare successivamente nella distribuzione delle cose, e che noi chiameremo in avvenire *Legge d' alterazione*. Ora egli è manifesto, che si avrà una idea adeguata della medesima,

se si saprà quale sia stato il cangiamento di posto che avranno subito le cose dopo la prima alterazione. Imperciocchè supponendosi per ora che la legge di alterazione rimanghi sempre la medesima, conosciuta che sia una volta, per adempirla nelle successive alterazioni, non si avrà che a replicarne l'effetto similmente nelle successive distribuzioni di cose che andranno nascendo. Così se l'ordine primitivo era O, e se dopo la prima alterazione ne è risultato l'ordine espresso dalla colonna P (Tav.[a] 2.[a]) questa colonna indicherà la legge d'alterazione da seguirsi per produrre tutte le diverse distribuzioni delle cose che si terran dietro immediatamente l'una all'altra. Imperciocchè considerando attentamente la prefata colonna P, ne inferiremo che la Legge di alterazione è generalmente tale.

Che venga nel luogo		La cosa che prima era situata nel luogo	
	I.		III.
	II.		I.
	III.		V.
	IV.		II.
	V.		IV.

E conosciuto questo vedremo che la distribuzione che risulterà per una seconda alterazione sarà quella indicata dalla colonna Q, e che la colonna R indicherà la distribuzione che nascerà dopo la terza alterazione ec. Cosicchè ricorrendo sempre alla Legge P troveremo il modo di formare egualmente tutte le altre colonne.

L'esempio che ci siamo proposti or ora, essendo semplicissimo, anche i meno esperti troveranno poca difficoltà a continuare le colonne R. S. ec. quanto sarà loro in grado. Ma s'avrebbe a superare grandi impicci, e fastidi se una sì fatta operazione dovesse eseguirsi sopra un gran numero di cose, con leggi d'alterazioni complicate, e per molte colonne.

Per la qual cosa affine che nessuno se ne sgomenti crediamo a proposito di avvertire che più abbasso troveremo un modo spedito e facile di comporre di più maniere tutte le colonne delle successive alterazioni, senza pericolo di commettere errori, ove si adopri una mediocre attenzione.

4. Premesse queste convenzioni se ci verranno dunque presentate le due Tav. 3.ª e 4.ª conosceremo a dirittura, che desse esprimono entrambe i dati necessarj per formarne due problemi distinti, e che O, e P sono l' ordine primitivo e la legge d' alterazione del primo; essendo O′, e P′ l' ordine primitivo e la legge d'alterazione del secondo.

Ma se ci faremo nel proposto caso ad esaminare più attentamente le leggi di alterazione P, P′, confrontandole insieme troveremo che entrambe sotto differente aspetto contengono le medesime condizioni importando tanto l' una che l' altra

	I.		3.°
Che nel	II.	venga la cosa	5.°
	III.	che avanti	4.°
posto	IV.	era nel luogo	2.°
	V.		1.°

Entrambi questi problemi hanno adunque comune la stessa *legge di alterazione*. Il giro quindi delle cose A, B, C, D, E, della Tav.ª 1.ª sarà perfettamente simile a quello delle cose D, C, A, E, B, della Tav. 2.ª Tutta la differenza fra l'un problema e l'altro consisterà in questo, che i giri che nel primo appartengono alle cose A, B, C, D, E, nel secondo apparterranno rispettivamente alle cose D, C, A, E, B.

Ma la natura della presente ricerca nella quale ci proponiamo unicamente di tener dietro al giro delle cose non ha, generalmente parlando, bisogno di por mente alla qualità delle cose stesse, che nelle successive alterazioni si vanno movendo. Imperciocchè, purchè la cosa che è per esempio

in primo luogo faccia sempre un tal giro, nulla fa che sia dessa piuttosto la A, che la B, o qualunque altra.

Ora se ci è lecito di prescindere dalla qualità delle cose, l' uno e l' altro problema essendo assoggettati alla stessa legge P, ovvero P′, non saranno per noi che un solo, e medesimo quesito, e la regola che troveremo per isciogliere uno di essi sarà la medesima che dovrà adoperarsi per isciogliere il secondo.

Se ci verrà dunque proposto il problema della Tav.[a] 4.[a] noi potremo cangiarlo in quello della Tav. 1.[a], che atteso l' ordine naturale, in cui sono collocate le lettere A, B, C, D, E, nell' ordine primitivo viene rappresentato più semplicemente. E in generale comprenderemo eziandio, che ogni qualvolta ci verrà proposto un ordine primitivo in cui le lettere non siano disposte secondo l' ordine alfabetico, noi saremo liberi di rimettervele purchè abbiamo l' avvertenza di fare contemporaneamente nella legge d' alterazione quel cangiamento che sarà necessario perchè esprima pel nuovo ordine primitivo quelle stesse condizioni che il problema aveva prefinito riguardo all' ordine primitivo proposto da principio.

5. Questa trasformazione nell' ordine primitivo non ha in se stessa alcuna difficoltà fuori di quella che può nascere talora da una soverchia quantità di lettere, la quale ov' abbia luogo, può facilmente produrre della confusione e facilitar la strada agli errori. Onde allontanarne il pericolo è del nostro istituto di mostrare in questo luogo una regola facile e piana di eseguirla. Sia l' esempio della Tav.[a] 5.[a], e vogliasi applicare la legge P ad un ordine naturale, senza che si alterino le sue condizioni.

Tra le colonne O, e P si scriveranno nell' ordine dato, cioè nel naturale, tante lettere minuscole a, b, c, d, e, ec. quante sono le grandi D, C, A, E, B ec. cui si pongono di contro; indi si stabiliranno le equazioni $D=a$, $C=b$, $A=c$ ec. come si vede nella Tavola 5[a], e finalmente di contro la

C, E, D ec. della colonna P posti i loro valori ricavati dalle equazioni precedenti si otterranno due colonne di lettere minuscole, che indicheranno la nuova legge che si cerca equivalente alla prima proposta, la quale potrà ridursi di nuovo, se piaccia in lettere majuscole come si vede eseguito nella Tav.[a] 6.[a]

Ognuno si accorgerà facilmente, che se si trattasse di applicare una legge qualunque secondo un cert' ordine, ad un altr' ordine diverso, ancorchè non naturale, il metodo indicato testè sarebbe egualmente buono.

6. Conformemente a questi principii ci sarà dunque lecito di quì innanzi di supporre che tutti gli ordini primitivi ci vengano assegnati di tal maniera, che la cosa A sia sempre nel posto I, la B nel II, la C nel III ec. Conciossiachè o tali saranno effettivamente i posti attribuiti a quelle cose nel problema; o se non lo sono potremo sempre ricondurvele facendo quella mutazione nella legge di alterazione, che abbiamo mostrata di sopra. Di tal maniera le proposizioni dei problemi si ridurranno ad essere più semplici ed uniformi.

Anzi perchè potendo noi prescindere dalla qualità delle cose, nulla c' interessa più, che di conoscerne il numero, ommetteremo d' ora innanzi di contrassegnarle colle lettere A, B, C, ec., ma ci serviremo invece, per notarle dello stesso numero del posto che occupano nell' ordine primitivo, che scriveremo con cifre arabiche. Nell' ordine naturale i numeri 1, 2, 3, ec. vorranno dunque dire la cosa che occupa il posto I, quella che occupa il II, quella che occupa il III, qualunque esse si siano e senza neppur curarci di conoscerle. E per questo modo ci procureremo l'avvantaggio di avere a nostra disposizione un numero indefinito di segni atti a denotar le cose, che ci gioverà moltissimo massime in que' problemi più complicati ove le lettere dell' alfabeto sarebbero riuscite troppo scarse per denominare una grandissima quantità di cose.

7. Per l'avvenire adunque la esposizione di un problema

si farà da noi con due colonne O, e P (Tav.ª 7.ª): indicando colla prima l' ordine primitivo, e coll' altra la legge di alterazione. Ma per le cose convenute sin quì l' ordine primitivo O sarà composto di due colonne verticali una *p* di numeri romani, l' altra *c* di cifre, nelle quali i numeri dello stesso valore in entrambi i caratteri si corrisponderanno sempre orizzontalmente. Ma così facendo noi ci obbligheremmo ad un raddoppiamento di scrittura, che si potrà risparmiare, purchè si sottintenda che il numero del posto abbia sempre da essere lo stesso che quello che nella colonna *c* indica la cosa. Attenendoci dunque ad una tal regola l' esposizione del problema che si contiene nella Tav.ª 7.ª si cangerà in quella contenuta dalla Tav.ª 8.ª col risparmio de' numeri romani della colonna *p*. Nè vi sarà pericolo che per simile compendio scemi punto la precisione della proposizione. Imperciocchè data la Tavola 8.ª si saprà subito che con quella si propone di determinare il giro di una serie di cinque cose, le quali disposte prima ne' posti indicati dal loro numero, si debbono traslocare tante volte quante si vuole con questa legge di alterazione che ogni volta

	1.º		3.º
venga	2.º	la cosa che	4.º
nel	3.º	prima era	2.º
posto	4.º	nel posto	5.º
	5.º		1.º

In questa guisa i numeri romani non abbisognando più per indicare i posti ci diverranno utilissimi per denotare i numeri della colonna, le quali tavolta possono moltiplicarsi in maniera, che mancherebbero i segni per distinguerle, ove fossimo costretti a prevalersi delle lettere.

Solamente potrebbe addivenire che incontrandosi una cifra, non si sapesse più distinguere se per essa venisse

indicato un posto, ovvero una cosa. Per distruggere quest' equivoco troviamo opportuno di convenire che d' ora in avanti ogni cifra si scriva al modo solito, quando rappresenta il numero di una cosa; ma quando poi rappresenta il numero di un posto debba circondarsi con due parentesi. Secondo questo patto la cifra 5 vorrà dire *la cosa quinta* e (5) si dovrà leggere *posto quinto*. Così avremo l' avvantaggio di evitare spesso la soverchia repetizione dei vocaboli *cosa e posto*.

Quello che diciamo delle cifre dovrà pure intendersi delle lettere, quando ce ne avremo a valere invece delle cifre per rendere più generali i nostri ragionamenti. Così dunque b vorrà dire la cosa b^{esima} ed (a) il posto a^{esimo}. In tale accordo i numeri della colonna O egualmente che quelli delle P,Q,R,S, (Tav.ª 9.ª) rappresentano le diverse cose. Ma per un privilegio speciale i numeri della O nel medesimo tempo rappresentano anche i posti che le cose occupano in tutte le colonne. Così p. e. il n.° 4. della O mostra che la cosa 4.ta è in essa nel quarto posto, ma indica eziandio che anche tutte le cose 5, 1, 3, 2, collocate nella stessa fila orizzontale occupano il quarto posto delle colonne P, Q, R, S, rispettivamente.

I numeri dunque della colonna O prestano un doppio ufficio: e siccome il più ripetuto dei due si è quello di distinguere i posti, noi preferiremo di scriverli colla distinzione addottata chiudendoli cioè tra parentesi. Servendo a tutte le convenzioni proposte in questo paragrafo la Tav.ª 9.ª sarà dunque da riformarsi e da scriversi come si vede eseguito nella Tav.ª 10.ª

8. Ma se l' ordine primitivo a cui viene applicata la legge d' alterazione non fosse naturale, siccome accade nel problema accennato dalla Tav.ª 11.ª, non sarebbe allora più vero che ogni cifra della colonna c esprimesse contemporaneamente e il numero del posto, e quello della cosa che tiene occupato. In questo caso ed in tutti i somiglianti non può dunque aver più luogo il modo compendioso di annunciare i problemi, che abbiamo adottato per gli altri casi ove

la legge viene applicata ad un ordine primitivo naturale. Per conseguenza se mai avverrà, che non ci sia lecito di eseguire la trasformazione del §. 5., noi dovremo lasciar stare le convenzioni del paragrafo presente, ritornare alla maniera primordiale di scrivere, formando dell'ordine primitivo due colonne, una p di posti, e l'altra c di cose, come si vede nella Tav.ª 11.ª nella quale le cifre tra parentesi indicheranno solamente i posti.

9. Ove dunque nessun impedimento ci ritenga dal porre in opera le regole convenute, avremo sempre in pronto un modo semplicissimo di esporre per iscritto la posizione di un qualunque problema del genere che trattiamo. E noi preferiremo nel decorso di queste ricerche di esporre ogni problema dicendo semplicemente: sia il Problema indicato dalla Tavola . . . ., anzi che di perderci ad ispiegarne ad una ad una le condizioni colle parole. Avvegnachè, non si può generalmente parlando spiegare una legge di alterazione senza nominare ad uno ad uno tutti i posti e tutte le cose delle quali si cerca il giro: onde se ve ne sia molto numero il discorso può divenire prolisso e complicato da stancare qualunque pazienza.

È ben vero per altro che fra le tante leggi di alterazione che si possono proporre per una certa serie di cose, se ne incontrano talora delle regolari, che possono, anche parlando, descriversi brevemente. Tale sarebbe per mò d'esempio il problema della Tav.ª 12.ª la cui legge d'alterazione potrebbe enunciarsi così.

Che tutte le cose poste nei luoghi dispari abbiano a discendere ne' pari immediatamente inferiori: e che tutte le cose poste ne' luoghi pari abbiano ad ascendere nei dispari immediatamente superiori.

E tale sarebbe pur l'altro problema della Tav.ª 13.ª di cui si spiegherebbe la legge d'alterazione brevemente così

Che tutte le cose abbiano a discendere nel posto immediatamente inferiore portandosi poi l'ultima cosa in primo posto.

In entrambi questi problemi, qualunque sia per essere

il numero delle cose la legge d' alterazione si potrà sempre esprimere cogli stessi vocaboli speditamente. Ma queste leggi regolari sono pochissime sempre mai a fronte di tutte quell'altre bizzarrissime, e lontane da ogni regola, che per un dato numero di cose potranno immaginarsi. Laonde essendoci proposti di considerare il problema in tutta la sua generalità, varrà assai meglio che ne cerchiamo la risoluzione per questi casi bizzarri ed indipendenti da ogni regola, anzi che per quegli altri, le cui leggi d'alterazioni sono semplici ed uniformi. Così facendo le nostre risoluzioni potranno di leggieri accomodarsi ai casi più facili, laddove dalla risoluzione di questi ultimi nessun frutto si ricaverebbe poi per que' primi più difficili e complicati.

10. Del resto col precedente discorso non si vuol già contendere, che non si potesse con certe cautele riuscire ad esprimere l' andamento di una qualunque legge d' alterazione col mezzo di formole algebraiche. Anzi ne' casi particolari si potrebbe ciascuna volta trovare il modo di assegnare certe funzioni aritmetiche, che, sviluppate con una data norma, producessero quella stessa serie di cifre che componesse la legge di alterazione prescritta in quella circostanza. Ma vi vuol poco ad accorgersi che e nelle formole algebraiche, e nelle accennate funzioni, i termini e le cifre andrebbero crescendo in proporzione delle cose che si prendessero a contemplare nei diversi problemi, e che quindi le formole dell' uno e dell'altro genere diverrebbero il più spesso prolisse e complicate a segno da non potersene valere che con grande difficoltà. Nè per altra parte si potrebbe sperare col loro mezzo di sciogliere il problema che ci siam proposti, più speditamente e più generalmente che co' metodi che siamo per esporre. Ogni studio dunque che spendessimo per rintracciare le formole accenate riuscirebbe di poco o di nessun profitto, e quindi giudichiamo spediente cosa di procedere innanzi senza occuparcene di più.

ARTICOLO II.

Proprietà generale delle leggi di alterazione.

11. Accordatici sul modo di stabilire la posizione di un qualunque problema, per fare un passo che ci accosti a risolverlo, prendiamo ad esame l' indole che aver debbono le leggi tutte di alterazione, che immaginar si possano. In generale data una serie di cose 1, 2, 3, 4, . . . c disposte secondo l' ordine naturale dei numeri, una legge qualunque d' alterazione non è altro che una nuova disposizione che s' induce a que' numeri medesimi rappresentanti le cose, ovvero, ciò che vale lo stesso, una permutazione che si fa nell' ordine di que' numeri. Tante sono dunque le leggi di alterazione che si possono immaginare per le cose 1, 2, 3, ... c quante sono le permutazioni differenti dalla disposizione 1, 2, 3, ... c, che si potranno indurre nelle medesime. Ma tutte le possibili permutazioni di un numero c di cose ascendono alla quantità $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times c$. Dunque tutte le permutazioni differenti dal primo ordine che avevan le cose, ossia tutte le leggi d'alterazione immaginabili per esse sono di numero $c(c-1)(c-2) \ldots 3 . 2 . 1 - 1$.

12. Fingiamo adesso che ci venga proposto un ordine primitivo O, che per la chiarezza di ciò che siamo per dire torneremo questa volta a scrivere in due colonne, una p di posti e l' altra c di cose, le quali intenderemo che siano finite di numero. Poscia fra le tante leggi di alterazione che possono immaginarsi scegliamone una P per l' applicazione successiva ed ordinata della quale nasca, comprendendovi l' ordine primitivo ancora, una serie di colonne, che indicheremo questa volta non coi numeri romani ma colle lettere c, P, Q, R, S, T (Tav.[a] 14.[a]); e finalmente supponiamo che dopo la colonna T, si torni ad ottenere una delle colonne già ottenute, p. e. la Q.

In questo caso si sarà ottenuta dunque la Q di due maniere. Una volta alterando la colonna P, ed un' altra la T colla stessa legge P. Ma Q è la medesima in entrambi i casi ed è pur la medesima la legge: dunque convien concludere che la colonna T è identica colla P, e che la nostra serie non è già *c*, P, Q, R, S, T (Tav.[a] 14.[a]) ma bensì *c*, P, Q, R, S, P, Q (Tav.[a] 15.[a]).

Ma similmente si è ottenuto P, alterando la prima volta *c*: e poi si ottiene dopo alterando S colla stessa legge: dunque sono le stesse anche le colonne *c* ed S, e la nostra serie non è neppure *c*, P, Q, R, S, P, Q, come l'abbiam supposta (Tav.[a] 15.[a]) ma sibbene *c*, P, Q, R, *c*, P, Q, (Tav.[a] 16.[a]).

È poi manifesto che se questa serie si vorrà continuare ulteriormente, mantenendo sempre la stessa legge, dall'ultima colonna Q dovrà nascerne un' altra volta la colonna R, e dalla R di nuovo la *c*, indi di nuovo la P, la Q, la R, ec. Cosicchè seguitando s' abbia a rinnovare sempre il periodo delle prime colonne *c*, P, Q, R, e ciò quante volte ci piacerà. E non vi può essere poi difficoltà a concepire che questo discorso si potrà sempre applicare egualmente a qualunque altro caso, nel quale siccome in questo una qualche volta si rinnovi una delle colonne.

Rimane dunque generalmente dimostrato che non può darsi nessuna legge d' alterazione che faccia rinnovare una qualunque colonna, senza che faccia rinnovare egualmente anche tutte le altre, producendo una serie indefinita delle medesime, composta di periodi di colonne tutti perfettamente eguali tra loro ed egualmente disposti.

Ora le colonne *c*, P, Q, R, S, T, ec. non sono altro che altrettante permutazioni che s'inducono nelle cose contenute nella colonna *c*, le quali sono per la supposizione finite di numero. Dunque debbono esser finite anche le permutazioni che se ne possono fare. Dunque se in un dato problema qualunque si trovino prima le colonne *c*, P, Q, R, S, T e si prosegua a cercarne delle altre indefinitamente, sarà

indispensabile che una qualche volta si ricada in una delle già trovate, e ciò sarà vero qualunque sia la legge d' alterazione, che sarà stata proposta.

Dunque il ricadersi in una colonna eguale ad una delle già trovate, non è l'effetto di una legge di alterazione particolare, come avevamo supposto da principio, ma sibbene una proprietà inerente ad ogni legge di alterazione qualunque. Per conseguenza sotto qualsivoglia legge d' alterazione la serie delle colonne che si otterrà, sarà sempre il complesso di tanti periodi di colonne tutte eguali, ed egualmente disposte, l' une rispetto all' altre, i quali si succederanno senza interruzione un dopo l' altro indefinitamente.

13. Il Teorema che ci è riuscito di scuoprire varrà moltissimo ad abbreviar la strada che ne rimane per venir a termine della nostra ricerca. Conciossiachè proposto essendoci di determinare il giro che debbe accadere nelle cose c per una qualunque quantità di alterazioni eseguite secondo una data legge P; ed essendoci già renduti sicuri che l' ordine delle colonne c, P, Q, R, S, T ec. dopo un certo numero delle medesime si rinnova di necessità sempre identicamente a se medesimo, e ciò indefinitamente, apparisce a dirittura, che noi avremo conseguito il nostro scopo, se sarem giunti a definire soltanto il giro delle cose, che dovrà succedere nel primo di tutti i periodi prefati. Avvegnachè quando lo avremo conosciuto, per iscorgerne il proseguimento ulteriore non avremo più che a replicarlo di mano in mano due, tre, e quante volte farà di mestieri per esaurire quel numero di alterazioni, che ci sarà stato prefinito nella proposizion del problema.

ARTICOLO III.

Del modo di determinare il giro delle cose ne' varj problemi, e di risolvere alcuni quesiti analoghi allo stesso.

14. Poichè dunque tutta l'importanza maggiore consiste nell' arrivar a conoscere il giro che fanno le cose nel primo periodo delle colonne, dopo che si sono dipartite dalla O, sino a che vi siano ritornate, occupiamoci senza indugio di considerarlo. E se le cose saranno scarse di numero non ci si faran contro grandi difficoltà.

Proposti difatti l'ordine primitivo O, e la legge P (che per amor di chiarezza scriveremo ancora secondo il primo metodo) si giugnerà facilmente in questo caso particolare a veder che le colonne, che resultano per effetto di essa debbono appunto essere le P, Q, R, S, O, quali sono descritte nella Tav.ª 17.ª, e che riavutasi la O tornerà sempre a replicarsi il loro periodo nello stesso ordine della prima volta, per quanto piacerà di continuare nelle alterazioni. Ma lo studio che si sarà posto a formar le prefate colonne in un esempio così semplice ci farà accorti che molto sarebbe il pericolo di errare, e grave la fatica da superarsi, se non si trovasse un metodo più spediente per determinarle, massime in que' casi ove la quantità delle cose fosse considerevole.

Affine pertanto di avviarci a ritrovarle riprendiamo sott' occhio lo stesso ordine O, e la stessa legge P, e cerchiamo, come si possano trovare tutti i posti che la cosa 1. occuperà nelle colonne P, Q, R, S, V, (Tav.ª 18.ª) deducendoli immediatamente dalla legge P, e senza bisogno di trascrivere come sopra le diverse colonne. E quanto al posto che la cosa 1. avrà nella colonna P, essendo già data la stessa perchè serva di legge, non vi sarà da far altro che da leggervi che la 1. debbe occuparvi il posto II, notandolo

come il primo che dovrà tenere subito dopo che si sarà partita da O. Ma dove andrà poi nella seguente colonna Q?

Per rispondere osserviamo che quando la 1. sta per passare in Q essa già si ritrova nel posto II. Sarà dunque necessario che essa ottenga in Q quel posto, che per la data legge la cosa 2. debbe acquistare in una alterazione. Ma la 2. per la legge P debbe passare in IV. La 1. dovrà dunque nella colonna Q ottenere il posto IV.

Collo stesso discorso concluderemo che essendo la cosa 1. nel posto IV. quando sta per passare in R, essa dovrà ottenervi il posto che la 4. ottiene in una alterazione cioè il V., e che nella colonna S debbe guadagnare quel posto che in un'alterazione guadagna la cosa 5, cioè il III, e finalmente che nella T la 1. tornerà al posto che aveva in O cioè al I. Cosicchè il giro totale della cosa 1. dopo che si sarà partita dalla O sarà stato necessariamente pei posti II, IV, V, III, I, giro che si rinnoverà poi sempre coll' ordine medesimo in appresso indefinitamente. E non v' è alcun dubbio, che se le cose state fossero assai dippiù, non avessimo trovato nello stesso modo il giro di una qualunque delle cose assegnate nel problema.

15. Ma il discorso che abbiamo dovuto fare sarebbe anch' esso soverchiamente prolisso se dovessimo ripeterlo ogni volta. Ma per fortuna saremo sempre in grado di compendiarlo moltissimo, riducendolo ad operazione. Per veder come ciò si faccia scriviamo (Tav.ª 19.ª) la stessa posizione di problema che nel §. precedente, non più come abbiamo fatto, ma secondo il convenuto del §. 7. Ciò fatto per conoscere il giro della cosa 1. si operi come segue:

Primo	si trovi	1.	e si noti	(2)	che in O
Secondo		2.		(4)	
Terzo	in P	4.	in C il	(5)	gli sta di
Quarto	la cosa	5.	posto	(3)	contro
Quinto		3.		(1)	

Di questa maniera facilissima che s' imparerà a colpo d' occhio troveremo i numeri (2), (4), (5), (3), (1), che come si vede sono gli stessi per ogni riguardo di valore e di collocazione che gli altri II, IV, V, III, I, che sopra abbiam veduto indicare i posti che successivamente occuperà la cosa 1. nelle colonne P, Q, R, S, ec.

L' operazione ridotta a questo grado di semplicità e di uniformità potrà adesso applicarsi senza studio, e quasi senza pericolo di errore anche ad un numero grande di cose.

E se ora col metodo insegnato vorremo cercare per lo stesso problema che abbiam per le mani il giro ancora dell' altre cose 2, 3, 4, 5, formeremo facilmente la Tav.[a] 20.[a] che descrive tutti questi giri.

16. Eccoci dunque pervenuti a conoscere il giro che nel problema propostoci fanno tutte le cose nel primo periodo delle colonne. Ma la tavola che ce lo rappresenta varrà eziandio ad insegnarci un' altra proprietà interessantissima di questo genere di permutazioni, e si è quella che trovato il giro di una delle cose può sempre da questo inferirsene a dirittura quello di tutte le altre senza bisogno di replicare per ciascuna cosa l' operazione insegnata precedentemente.

E in realtà si ponga mente che il giro della 2 si è (4), (5), (3), (1), (2), e che quest' ordine di cifre resulta dalla fila A, purchè s' incomincino in essa a scrivere immediatamente i numeri dopo il (2), e si torni a capo sino a che si arrivi al (2) inclusive: e similmente si osservi che essendo (1), (2), (4), (5), (3), il giro della 3; questo giro medesimo può ricavarsi dalla fila A scrivendo per ordine le cose che si succedono dopo il (3) sino che si arrivi tornando da capo al (3) inclusive; e lo stesso si verifichi parimente del giro dell' altre cose che rimangono. E fatto questo se ne concluda la maniera di derivare dalla sola fila A tutte le altre file B, C, D, E ec.

Si osservi dippiù che non è già necessario per determinare tutti questi giri di cose, di ricorrere esclusivamente alla

fila A, ma che qualunque altra B, C, D, ec. che si abbia, presterà egualmente il comodo istesso. Così p. e. dalla C potrà ricavarsi il giro della 1, scrivendo le cifre (2), (4), (5), (3), (1), che dopo l' (1) si succedono, tornando a capo al solito, e dalla fila E si ricaverà il giro della cosa 4. scrivendo le cifre (5), (3), (1), (2), (4), colla regola medesima.

17. La Tav.[a] 20.[a] del §. 14. ponendoci sottocchio tutto in una volta il giro, che far debbono le cose, c' insegna che nessuna di esse può tornare al posto d' ond' era partita, senza prima avere occupati ad uno ad uno tutti quanti i posti dell' altre cose, che si muovono contemporaneamente con essa: e siccome la prefata tavola è il resultamento del raziocinio che abbiam fatto al §. 14., il quale, mutati i numeri, può sempre addattarsi a qualunque altra circostanza di cose e di leggi d' alterazione, possiamo con franchezza inferirne che ciò che dicevamo debbe universalmente accadere in tutti i problemi.

Ma perchè l' aver dovuto noi prevalerci di un esempio particolare e determinato per iscoprire analiticamente la verità dei §§. 14. e 15. potrebbe aver lasciato nelle menti più scrupolose qualche sospetto sulla loro generalità, non ci pare fuor di proposito di far vedere adesso, che si arriva alla stessa conclusione anche per la via della sintesi.

18. Cominciamo pertanto dal dimostrare il seguente Teorema che forma il cardine di tutto il resto.

Se una legge d' alterazione produce l' effetto che una cosa h vada una volta nel posto di un' altra l, essa debbe produrre anche quello che la cosa l vada una qualche volta nel posto della h.

E vaglia il vero: perciò che abbiam dimostrato al §. 12. dovendo quandoche sia ricadersi nell' ordine primitivo, non si può a meno che la cosa h dal posto (l) non ritorni una qualche volta al primo (h) d' ond' era partita. Ma la legge d' alterazione che produce quest' effetto per la cosa h quando si trova in (l) debbe egualmente produrlo su tutte le cose,

quali si siano, che si troveranno successivamente in (l). Dunque debbe produrlo prima di tutto sulla medesima l, e portarla quindi ad occupare il posto (h), come ci proponevam di provare.

È poi cosa manifesta che se occorreranno p. e. h alterazioni perchè la h da (l) ritorni al suo posto, questo medesimo numero sarà quello che occorrerà anche per portare la l nel posto (h).

Da questo principio discendono naturalmente le seguenti conseguenze. Sia una legge tale d' alterazione che faccia che la cosa h debba successivamente e per ordine occupare i posti delle cose a, b, c, d, f, ec. e ritornarsene poi a quello (h) d' ond' era partita. Per quello che abbiamo provato or ora, sarà dunque indispensabile che viceversa anche ciascuna delle cose a, b, c, d, f, ec. vadano la loro volta continuandosi le alterazioni, ad occupare il posto della h.

Ma per la supposizione dal posto (h) una cosa debbe passare successivamente e per ordine in tutti i posti (a), (b), (c), (d), (f) ec. delle altre. Non si potrà dunque a meno, che ognuna delle cose prefate non occupi successivamente i posti di tutte le altre, che circolano seco contemporaneamente, come avevamo diggià concluso sopra al §. 17.

19. Quindi si deduce ancora senza difficoltà che essendo conosciuto il giro $(a), (b), (c), (d), (f) \ldots (h)$ della cosa h si potrà sempre da questo inferire il giro di tutte le altre cose a, b, c, d, f, ec. senza bisogno di aver a ricorrere alla legge di alterazione per rintracciarlo.

Ed effettivamente se dal prefato giro (a), (b), (c), (d), $(f) \ldots (h)$ ricercheremo quale sarà quello della a, vedrassi ben tosto che dovrà essere lo stesso che fa la cosa h quando si parte dal luogo di a cioè (b), (d), $(f) \ldots (h)$, (a): e se vorremo il giro della b troveremo che debba esser quello che fa la h partendosi da (b); cioè (d), (c), $(f) \ldots (h)$, (a), (b), ec. E poichè troveremo i giri di tutte le altre cose similmente, concluderemo che dato il giro (a), (b), (c), (d), $(f) \ldots (h)$ di

una cosa h si potrà sempre trovare da quello il giro di tutte le altre cose, che circolano colla h, notando i posti tutti che vengono dopo di essa, e tornando a capo sinchè si arrivi ad inchiudere nella serie quel numero che si agguaglia a quello della cosa per cui si fa la ricerca, come appunto avevamo trovato al §. 16.

Dato dunque il giro della cosa h noi comprenderemo facilmente che il giro di tutte quante le cose che circolano con essa si è quello che viene denotato dalla (Tav.[a] 21.)

20. Il primo avvantaggio che ne ritorna dal saper sempre conoscere il giro di ciascuna delle cose, si è quello di poter in qualunque problema indicare quel posto in cui dovrà trovarsi una data cosa dopo un dato numero di alterazioni.

Un solo esempio sarà sufficientissimo a mostrare il metodo da tenersi per rispondere ai quesiti di questo genere. Dato l' ordine O e la legge I Tav.[a] 22.[a] cerchisi in qual posto dovrà trovarsi la cosa 4 dopo 5 alterazioni.

Prima di tutto siccome ogni alterazione produce una nuova colonna dopo la O non vi è dubbio che la cosa 4 dopo 5 alterazioni non debba trovarsi nella colonna V.

Per trovarne poi il posto si cerchi il giro della cosa 4, che col metodo del §. 15. si troverà essere (6), (2), (3), (5), (1), (4), e posto mente che il termine 5[to] di questa serie si è (1) si risponderà che dopo 5 alterazioni il posto della cosa 4 sarà il primo della colonna V.

21. Se nella proposizione del problema in cambio dell' ordine O, e della legga I fosse stato assegnato il giro di una cosa qualunque nel quale si comprendesse anche il posto (4) corrispondente alla cosa 4 sulla quale si fa la ricerca: p. e. se fosse assegnato il giro della 3 colla serie (5), (1), (4), (6), (2), (3); questo dato ci basterebbe per isciogliere il problema del §. precedente. Conciossiachè dalla serie prefata potendosi sempre inferire che il giro della 4 debb' essere (6), (2), (3), (5), (1), (4) [§. 16], anche per questa via riusciremo ad ottenere quella stessa cognizione dalla quale abbiam ricavata la risposta nel caso precedente.

22. Può avvenire talvolta che il numero delle alterazioni dopo le quali si cerca il posto di una cosa sia maggiore di molto di quello delle colonne che formano il primo periodo: p. e. può domandarsi quale sarà il posto della cosa 4 dopo 27 alterazioni. In questa circostanza, quanto alla colonna, si sa che il suo numero sarà sempre quello delle alterazioni proposte, cioè nel caso presente il 27.^{mo}.

Ma quanto al posto, farà d'uopo riflettere, che sei potendo essere per le condizioni del problema (che fingiamo sempre essere il precedente) le colonne che compongono il periodo, ogni cosa debbe ritornare al posto che aveva in O dopo sei alterazioni. Dal che si scorge che dopo 24. alterazioni ogni cosa sarà ritornata al suo posto primiero per la quarta volta; onde dopo 27 alterazioni ciascuna cosa dovrà ritrovarsi a quel posto medesimo in cui si trovava dopo la terza alterazione.

Ora poichè dopo la terza alterazione, ossia nella terza colonna la cosa 4 era al posto (3), risponderemo con sicurezza che dopo 27. alterazioni la cosa 4 si troverà al posto (3) della 27.^{ma} colonna.

23. Per comprendere tutto questo discorso sotto forme generali, diremo che cercandosi quale sarà il posto di una cosa a dopo un numero N di alterazioni, si dovrà seguitare questa strada per determinarlo.

Quanto alla colonna se ne assegnerà subito il numero dopo l' ordine O che sarà quello stesso N che prescrive fra i dati del problema il numero delle alterazioni. Ma per saperne il posto si cercherà il giro della cosa a, che supporremo espresso dalla serie (b), (c), (d) . . . (a) composta di n termini.

Essendo $N < n$ si conteranno per ordine, e tornando a capo quanto occorre subito dopo a n termini, l' ultimo de' quali mostrerà il posto cercato. Ma se $N > n$ si dividerà N quanto si può per n onde averne il resto r. Indi contati come sopra r termini nella serie del giro per ordine e

cominciando subito dopo a, l' r^{mo} di questi indicherà il posto che la a occuperà nella colonna N^{ma} dopo un numero N di alterazioni.

24. Dall' esserci messi in istato di ricavar sempre dalla legge data di alterazione il giro di una cosa qualunque, risulta pure un secondo avvantaggio, quello cioè di poter sempre per una data cosa assegnar la colonna ov' essa sarà per ottenere un posto determinato.

Sia dato l' ordine O e la legge I (Tav.ª 23.ª), e domandisi di sapere in quali colonne, ovvero dopo quante alterazioni le cose 6 e 4 occuperanno il posto (5). Trovisi il giro della 6 che sarà (2), (3), (5), (1), (4), (6), (§. 15), e poichè il (5) forma il terzo termine, contando subito dopo la 6 per ordine e tornando da capo, se ne concluda che la 6 verrà nel posto (5) nella III colonna, ossia dopo tre alterazioni.

Similmente dal giro della 6 trovato quello della 4 dover essere (6), (2), (3), (5), (1), (4), (§. 16), ed osservatosi che il (5) è il 4.to termine, contando per ordine dopo il (4) e tornando a capo se ne inferisca che la 4 viene nel posto (5) dopo 4 alterazioni ossia nella colonna IV.

Si sa poi che sei essendo i termini della serie che esprime i diversi posti, e dovendo quindi essere pur sei le colonne che formano il periodo (§§. 12, 13) questo dovrà rinnovarsi per ogni sei alterazioni che si facciano. Dunque la cosa 6 otterrà il posto (5) non solo nella III ma eziandio nella IX, nella XVª, nella XXIª ec. e in generale in ogni colonna corrispondente ad un numero $6N + 3$: e per egual ragione la cosa 4 andrà ad occupare il posto (5) in ogni colonna corrispondente ad un numero $6N + 4$, rappresentando N in entrambi i casi un numero intero qualunque.

Osserviamo anche quì come al (§. 21) che se invece dell' ordine O, e della legge I ci fosse stato assegnato il giro di una cosa qualunque compresa nella circolazione delle cose 4 e 6, p. e. il giro della 1 colla serie (4), (6), (2), (3), (5), (1), da questa avremo di leggeri ricavato che il giro della 4 è

(6), (2), (3), (5), (1), (4), e che quello della 6 è (2), (3), (5), (1), (4), (6). Onde anche il giro di una qualunque delle cose ci sarebbe stato abbastanza per fornirci le cognizioni, che si richieggono per la risoluzione del presente quesito.

25. Ritornando colla memoria sul metodo descritto al §. 15. per trovare il giro di una cosa quando l' ordine è naturale, ravviseremo ch' esso si riparte nelle seguenti operazioni.

Primo. Si trova la cosa (p. e. la 1) nella colonna I (Tav.^{a} 23^a) e si nota il posto (4) che gli sta di contro in O.

Secondo. Si converte la cifra (4) di posto in quella 4 di cosa, e si fa su la medesima la stessa operazione che si è fatta sulla 1. E si replica sempre lo stesso sulle cifre che si vanno trovando, finchè la cosa 1 si vegga ritornata al posto che avea nell' ordine primitivo.

Ora la mutazione della cifra (4) di posto in quella 4 di cosa può quivi aver luogo, perchè quando l'ordine primitivo è naturale, le cifre della colonna O significano contemporaneamente e i posti, e le cose che dapprincipio occupano i medesimi. Ma se l'ordine non è naturale, come avviene p. e. nel problema della (Tav. 11.^{a}), le cifre *p* della colonna O non significando più che solamente posti, non si potranno più mutare in quelli delle cose che da prima gli occupavano, le quali sono generalmente parlando rappresentate da cifre diverse. Così nell esempio addotto ultimamente, vedutosi che la 1 sta di contro al posto (2), non si potrà già ridurre il (2) in 2: ma dovrassi in vece por mente che il posto (2) veniva in O occupato dalla 3, e che per conseguenza si debbe cercare in P non la 2 ma la 3 per proseguire secondo la regola l' operazione.

Questo esame basterà per farci conoscere le mutazioni da farsi alla regola insegnata, onde applicarla alla ricerca del giro delle cose ne' casi ove l' ordine primitivo non sia naturale. E codeste le accenneremo ora distesamente colla pratica cercando il giro dell'1 nell'esempio della Tav.^{a} 11.^{a} così.

Primo. Cerco l'1 in P e noto il posto cui sta di contro in O, e insieme la cosa che l'occupava: in questa maniera (2) 3.

Secondo. Cerco la 3 in P, e come sopra noto il posto che gli corrisponde in O, e la cosa che l'occupava, scrivendo (1) 4.

Terzo. Cerco la 4 in P, e noto (5) 2. posto che gli sta di contro P, e cosa che l'occupava.

Quarto. E così proseguo sinchè arrivo a trovare il termine (3) 1, e quì mi arresto: perchè essendo il (3) quel posto che occupava la 1 in O, m'avveggo che dessa 1 è ritornata al luogo d'ond'era partita.

Compiute poi tutte queste operazioni, si sarà ottenuta la serie (2) 3, (1) 4, (5) 2, (4) 5, (3) 1, la quale tradotta in parole esprime che la cosa 1 in I alterazione passa al posto (2) già prima occupato dalla 3; in II al (1) già occupato dalla 4; in III al (5) già occupato dalla 2. ec. Si vede poi che se non si desidererà di sapere altro che semplicemente quale sia il giro di una data cosa, tutte le cifre di cose che sono nella serie e che hanno servito a formarla, divengono inutili, e possono da essa cancellarsi. E ciò si fa manifesto, perchè la serie ritrovata riducendosi allora ad essere (2), (1), (5), (4), (3), mi dimostra che la 1 passa nella prima colonna al posto (2), nella II al (1), nella III al (5) ec. che è appunto ciò che si cercava. Nella pratica dunque chi abbia esercizio bastante, potrà far di meno di scrivere le cifre delle cose, in tutti quei casi, ove non sia necessario di conservarne la memoria.

26. Dalla cognizione del giro delle cose nei problemi appartenenti all'ordine primitivo naturale abbiamo dedotte moltissime conseguenze interessanti. E queste sono pur comuni anche ai problemi descendenti da un ordine arbitrario qualunque: ma per applicarvele occorre di farvi quelle modificazioni che abbiam fatto al metodo stesso di trovare il giro. Ora siccome non ci avverrà mai di avercene a prevalere, noi passeremo innanzi, per non allungare di troppo la

presente memoria, e abbandoneremo interamente la cura di questo lavoro a chi vorrà intraprenderlo per esercitarsi nella trattazione di questo genere di ricerche.

ARTICOLO IV.

Del modo di ricavare immediatamente dal Giro assegnato di una cosa e senza ricorrere alla legge di alterazione la Tabella delle colonne che ne nasceranno, continuando a far girare le cose.

27. Una Tavola d' alterazioni p. e. come la 25.ª che nasce dalla legge I applicata all' ordine O saprà scriversi a dirittura subito che si sappiano scrivere tutte le sue file orizzontali (*a*) (*b*) (*c*) ec., ovvero subito che si sappiano formare le sue colonne I, II, III ec. verticali. Ora e le file, e le colonne possono sempre ricavarsi dal giro di una cosa qualunque che venga assegnato. Veggiamo ciò prima di tutto relativamente alle file orizzontali.

Prevalendoci delle regole del §. 19. se ci venga assegnato il giro (*c*), (*f*), (*d*), (*g*), (*b*), (*a*), della cosa *a* saremo sempre in grado di formare la Tav. 24.ª che mostra i giri di tutte le cose che circolano insieme colla *a*. E se ci venga proposto d' indicare per ordine ad una ad una tutte le cose, che continuandosi le alterazioni andranno successivamente ad occupare nelle colonne un dato posto qualunque p. e. il (*b*), colla scorta della Tav. 24.ª ci troveremo sempre in punto di risolvere un tale quesito. Imperciocchè gittando l' occhio sulla medesima e percorrendone per ordine i giri diversi, troveremo che il (*b*) essendo il primo posto del giro della *g*, il secondo del giro della *d*, il terzo del giro della *f*, il quarto del giro della *c* ec., la *g* andrà in (*b*) dopo una alterazione, la *d* dopo due, la *f* dopo tre, la *c* dopo quattro, cosicchè la serie ordinata delle cose, che continuandosi le alterazioni occuperanno successivamente il posto (*b*) sarà *g*, *d*, *f*, *c*, *a*, *b*,

serie, che poi si tornerà a rinnovare da capo se si proseguirà più avanti nelle alterazioni.

Ora è manifesto che se data la legge I applicata all' ordine O (Tav.ª 25.ª) sicchè ne nasca il giro della *a* assegnato precedentemente, s' intenderanno compiute tutte le alterazioni che formano il primo periodo delle colonne. La serie *g*, *d*, *f*, *c*, *a*, *b* dovrà essere lo stesso, che la fila delle cose che si troveranno di contro orizzontalmente al posto (*b*), come si vede essere di fatto. Apparisce dunque da tutto questo che dato il giro di una cosa noi potremo trovare il modo di determinare quella che si vuole delle file orizzontali della Tav. 25.ª senza eseguire le alterazioni; e che per conseguenza potremo trovare ad una ad una tutte le file prefate, e compiere la Tav.ª 25.ª col solo ajuto del giro dato di una cosa qualunque, giacchè da questo si possono sempre ricavare i giri tutti delle altre cose che circolano con esse.

28. Ma questa operazione può compendiarsi d' assai risparmiandosi onninamente la Tav. 24.ª Conciossiachè se si confronterà la fila (*a*) della Tav. 25.ª col giro dato (*c*), (*f*), (*d*), (*g*), (*b*), (*a*), si troverà (prescindendo dalle parentesi) che d' essa non è altro che il giro medesimo scritto a rovescio, cominciando subito dopo *a*, cioè da *b*, e continuando sinchè vi s' includa la *a*. E così se si confronti una qualunque altra fila per es. la (*d*) della Tav. 25.ª col dato giro, si troverà sempre questa non esser altro che il giro scritto a rovescio cominciando subito dopo la *d*, e continuando sino ad includervi la *d*, e ciò prescindendo sempre dalla parentesi. Dunque venendo assegnato il giro di una cosa qualunque (*c*), (*f*), (*d*), (*g*), (*b*), (*a*) nascerà per la formazione della Tav.ª 25.ª la regola seguente.

Primo si scriveranno sotto O le lettere (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) quante sono per ordine. Secondo per formare una fila orizzontale, di contro una qualunque lettera della O si cercherà nel giro la prefata lettera, e cominciando subito dopo la medesima si scriverà a

rovescio il giro assegnato, continuando sino a che la lettera medesima vi rimanga inchiusa. E questa operazione si farà per ciascuna delle lettere che sono in O, cosicchè rimanga compiuta la tavola perfettamente. Così si formeranno tutte le colonne del primo periodo, e volendosi continuare oltre non si avrà a far altro che a prolungare le file trovate replicandone una dopo l' altra le lettere, nell' ordine medesimo in cui si trovano. Ridotta pertanto questa operazione ad un tal grado di semplicità crediamo di aver fedelmente liberata la promessa che facevamo da principio al §. 3.

29. Se l' ordine primitivo come nella Tav.[a] 26. p.[e] A, non fosse naturale, varrà la stessa regola adoprata colle seguenti modificazioni.

Primo. Dall' ordine O, e dalla legge I si ricaverà il giro di una cosa qualunque p.e. della a, che nell' esempio addotto verrà espresso dalla serie $(b)g$, $(a)b$, $(g)d$, $(d)f$, $(f)c$, $(c)a$. (§.25.)

Secondo. Volendosi determinare la fila orizzontale corrispondente ad un posto dato, si fisserà nel giro trovato quello stesso posto. Indi cominciando a scrivere dalla cosa annessa al termine che gli è vicino a sinistra, si scriveranno tutte le cose nell' ordine, in cui si succedono a rovescio, tornando a capo quant' occorre per includerle tutte. Per es. Se si vorrà la fila appartenente al posto d, si troverà la medesima essere d, b, g, a, c.

Terzo. Tutte le file trovate di tal modo si aggiugneranno all' ordine primitivo di contro ai posti competenti, e così potrà formarsi la tabella delle alterazioni del primo periodo, come si vede eseguito nella parte B della tavola.

30. Passiamo ora a rintracciare il modo di ricavar dal giro assegnato di una cosa qualunque le colonne verticali, di cui si compone la tavola delle alterazioni.

Dal teorema del §. 18. abbiam veduto prodursi immediatamente la conseguenza, che se una cosa qualunque a nelle successive alterazioni fa il giro de' posti (c), (f), (d), (g), (b), (a), anche tutte le cose c, f, d, g, b, a indicate dalle stesse

lettere fanno necessariamente lo stesso giro di posti. La serie adunque che esprime il giro di una cosa qualunque, spogliata che sia dalle parentesi indici de' posti, diventa sempre quella delle cose che circolano le une dipendentemente dalle altre precedendosi, e seguendosi.

Dalla disposizione (c), (f), (d), (g), (b), (a), sappiamo che viene denotato che la cosa a va prima in (c), indi in (f), indi in (d) ec. e così di seguito continuando le alterazioni, o le colonne. E la disposizione in cui si rimane la serie delle cose quando si ricava da quella de' posti spogliandoli delle parentesi, dà un' idea delle relazioni che conservano nell' avviarsi insieme contemporaneamente. Cioè la serie c, f, d, g, b, a delle cose disposte com' è, indica che mentre la a va in (c), la c le cede il posto andando in (f), e la f cede il posto alla c andando in (d), e la d cede il posto alla f andando in (g), e così del resto sino alla fine sempre secondo l'ordine della prefata collocazione. Di quì nasce necessariamente che in ogni serie di cose c, f, d, g, b, a derivata come sopra, ciascuna cifra denota sempre il posto al quale dovrà portarsi in una alterazione la cosa che la precede. Laonde noi ricaveremo con sicurezza dalla prefata serie che nella colonna I il posto (a) tocca alla b; il (b) alla g, il (c) alla a, il (d) alla f, il posto (f) alla c, finalmente il (g) alla d; cosicchè per formare la colonna I (Tav. 27.[a]) basterà che scriviamo dall' alto al basso di contro le lettere dell' ordine O le cose b, g, a, f, c, d, ordinatamente come stanno. E siccome la legge d' alterazione quale l' abbiamo considerata sin quì, è la stessa cosa che la colonna I, veggiamo inoltre qual sarà il modo da tenersi per trovare la legge d' alterazione, quando ci venga assegnato il giro di una cosa qualunque.

Premessa poi la precedente deduzione ne verrà di conseguenza quest' altra ancora, che ciascuna delle lettere della citata serie denota sempre anche il posto al quale dovrà portarsi in due alterazioni la cosa che la precede di due

termini; onde ne inferiremo che nella colonna II il posto (*a*) dovrà toccare alla *g*, il (*b*) alla *d*, il (*c*) alla *b*, il (*d*) alla *c*, il posto (*f*) alla *a*, ed il (*g*) finalmente alla *f*, e potremo così formare la colonna II come abbiamo fatto la prima.

E procedendo similmente troveremo ancora che ogni cifra della mentovata serie *c*, *f*, *d*, *g*, *b*, *a*, denota eziandio il posto a cui dovrà andare dopo tre alterazioni la cosa che la precede di tre termini; quello ove dovrà andare dopo quattro alterazioni la cosa che la precede di quattro termini; e che generalmente in una data serie di qualunque numero di cose ricavata dal giro di una di quelle, ogni cifra indica sempre il posto che toccherà dopo *n* alterazioni alla cosa che la precede di *n* termini: ov' è da intendersi, che se la serie non ne avesse tanti, sarebbero da compirsi tornando a contare da capo finchè occorresse. Laonde poi ne concluderemo questa interessante verità; che dal giro di una cosa qualunque si possono sempre ritrovare tutte le colonne verticali delle cose che formano la tavola delle alterazioni; come prima avevam trovato le file orizzontali, e che la regola ne è la seguente.

Dato il giro (*f*), (*d*), (*c*), (*a*), (*b*), (*g*), (*h*) si voglia trovare la disposizione delle cose dopo la VI[a] alterazione, o ciò che è lo stesso la colonna VI[a]: per riuscirvi.

Primo. Si scriveranno uno sotto l'altro i posti (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) sino all' ultimo (*h*) per ordine in O (Tav.[a] 28.[a]).

Secondo. Dal dato giro si formerà la serie di cose *f*, *d*, *c*, *a*, *b*, *g*, *h*, togliendo soltanto le parentesi alle lettere del giro assegnato.

Terzo. Trovata nella serie la lettera		e contati da quella a sinistra 6 termini, tornando da capo se occorra per compirli si troverà la cosa		che dovrà occupare nella colonna VI.[a] il posto	
	a		*b*		(*a*)
	b		*g*		(*b*)
	c		*a*		(*c*)
	d		*c*		(*d*)
	f		*d*		(*f*)
	g		*h*		(*g*)
	h		*f*		(*h*)

E con questo metodo semplicissimo, che non presenta difficoltà ad essere applicato a qualunque altro numero di operazioni, si formerà la colonna VI^a della Tav.^{a} 28 come ci proponevamo.

31. Ove si trattasse di problemi assoggettati ad ordini primitivi arbitrarii, si dovrà praticare la medesima regola, modificata come apparirà dall' esempio seguente.

Abbiasi il giro $(d) f$, $(b) g$, $(a) b$, $(g) d$, $(f) c$, $(c) a$, e si cerchi la disposizione che avranno le cose dopo la quinta alterazione, o ciò che è lo stesso, dimandisi quale sarà la colonna V^a.

Primo. Si scriveranno uno sotto l' altro i posti (a), (b), (c), . . . sino all'ultimo (g) come si vede eseguito in O Tav.^{a} 29.

Secondo

Fissato	(a)	e contati da quello a sinistra	d
nel	(b)	cinque termini (tornando a	b
proposto	(c)	capo se occorre) si trovi e se	f
giro	(d)	gli noti di contro la cosa an-	g
il posto	(f)	nessa al prefato quinto ter-	a
	(g)	mine che nel caso nostro sa-	c
		rà la	

E la colonna d, b, f, g, a, c, che ne nascerà sarà appunto la colonna V^a che si cercava.

32. Colla sola cognizione dei giri delle cose possono dunque formarsi sempre in due modi le tavole delle alterazioni, nel che si comprende la risoluzione di quasi tutti i quesiti di questo genere di ricerche. E per questa loro grande utilità, e perchè di spesso accade, come vedremo or ora, che le serie che li compongono sono di più pochi termini, che le leggi di alterazione, può ora richiedersi, se il presentarli sotto forme generali non potesse produrre quegli avvantaggi,

che abbiam negato alle formole generali delle leggi di alterazione (§§., 9, e 10.) sopra che fa d' uopo di fare le seguenti considerazioni.

Quando si desideri di comprendere il giro di una cosa entro una forma generale, converrà senza dubbio ricorrere alle funzioni circolari le quali sole possono godere della proprietà di produrre un ordine di valori, che dopo un certo termine tornino a rinnovarsi in quella conformità che si rinnovano le serie che rappresentano i giri delle cose.

P. e. Colla espressione $\frac{b-a}{2}\,\text{Cos.}\,n\pi\,\frac{b+a}{2}$ (rappresentando π la semicirconferenza del cerchio) si potrà indicare il giro di una cosa pei due posti (a), e (b) : colla formola $\frac{2c-a-b}{3}\,\text{Cos.}\,\frac{2n\pi}{3} + \frac{a-b}{3}\,\text{Sen.}\,\frac{2n\pi}{3} + \frac{a+b+c}{3}$ si indicherà quello di una cosa pei tre posti (a), (b), (c), colla $\frac{a-c}{2}\,\text{Sen.}\,\frac{n\pi}{2} + \frac{f-b}{2}\,\text{Cos.}\,\frac{n\pi}{2} + \frac{b+f-a-c}{4}\,\text{Cos.}\,2n\pi + \frac{a+b+c+f}{4}$ quello di una cosa pei quattro posti (a), (b), (c), (f).

E in generale il giro di una cosa per una quantità m di posti (a), (b), (c) . . . . . (m) si indicherà sempre con una espressione della forma

$$\text{A.Sen.}\,\frac{2n\pi}{m} + \text{B.Cos.}\,\frac{2n\pi}{m} + \text{C.Sen.}\,\frac{4n\pi}{m} + \text{D.Cos.}\,\frac{4n\pi}{m} + \text{E.Sen.}\,\frac{8n\pi}{m} + \text{F.Cos.}\,\frac{8n\pi}{m} + \text{G.Sen.}\,\frac{16n\pi}{m} \;.\;.\;.\;.\; + \text{V}$$

da prolungarsi sino ad un numero m di termini, affinchè si abbia un numero m di coefficienti compresovi l' ultimo V, che si determineranno come si fa quelli dei termini generali e delle somme delle serie a differenze costanti.

E questi coefficienti dovranno sempre essere di numero m senza speranza di diminuzione. Conciossiachè l' assoluta indipendenza dei numeri (a), (b), (c), (d) ec. che indicano i posti, la quale esclude qualunque regola di dedurli l' uno dall' altro, esige che ciascun d' essi introduca nella formola

un termine che addatti quella a se stesso perchè possa rappresentarlo independentemente dagli altri; ciò che colla dottrina delle serie può dimostrarsi facilissimamente.

Dovendo dunque, generalmente parlando, moltiplicarsi i termini di queste formole siccome quelli dei giri che rappresentano, noi concederemo bensì ch'elleno possano recar giovamento ne' casi, ove accada che per qualche circostanza particolare riescasi a compendiarle, il che può avvenire soltanto quando i posti (a) (b) si rendano dependenti l'uno dall' altro; ma non sapremo vedere che frutto render ci potessero ora che ci occupiamo a considerare l' indole comune a questo genere di problemi in tutta la generalità. Per la qual cosa senza intertenerci più lungamente su quest' argomento noi passeremo ad altro.

ARTICOLO V.

Distinzione delle leggi di alterazione in semplici, e composte. Applicazione de' metodi precedenti alle leggi composte.

33. Quantunque le leggi di alterazione sulle quali abbiam versato finora non siano state assoggettate a veruna condizione comune, pure se si ripiglieranno sott' occhio si scorgerà che s' incontrano tutte in una proprietà; in questa cioè, che tutte quante le cose contenute nell' ordine primitivo fanno il giro di tutti quanti i posti. Ma poco basta per accorgersi che moltissime altre se ne possono immaginare che non abbiano una somigliante proprietà.

P. e. dall' ordine O e dalla legge I (Tav.ª 30) ricavando il giro della cosa 1 troveremo che debb' essere (5), (6), (3), (1), (§. 14). Ricercando poi i giri della 2, e della 4 si troverà che il primo è (2), ed il secondo (4). In questo caso dunque le cose 1, 3, 5, 6, godono di un giro comune, mentre le cose 2, e 4. stanno ferme al loro posto.

Altro esempio. Dall' ordine primitivo O e dalla legge I

(Tav.ª 31) si ricerchi il giro della 1 che sarà (3), (5), (7), (1), e quello della 2 che sarà (4), (6), (2). In questo caso girano dunque insieme le cose 1, 3, 5, 7; e indipendentemente da esse girano insieme le cose, 2, 4, 6.

Terzo esempio. Dall'ordine O, e dalla legge I (Tavª 32.ª) si ricaveranno i seguenti giri

Giro della 1. pei posti (7), (1).

Giro della 2. pei posti (6), (11), (3), (2).

Giro della 4. pei posti (9), (8), (4).

Giro della 5. pei posti (12), (5).

Giro della 10. pei posti (10).

Per questa legge di alterazione girano dunque insieme

Primo le cose 1, 7.

Secondo le cose 2, 3, 6, 11.

Terzo le cose 4, 8, 9.

Quarto le cose 5, 12.

E quinto finalmente la cosa 10. sta ferma.

A malgrado dunque della somma irregolarità e bizzarria delle leggi di alterazione, gli esempii precedenti ci danno a vedere ch'elleno possono riferirsi a due classi ben distinte fra loro.

La prima si è di quelle leggi di alterazioni, le quali formano un solo sistema di tutte le cose contenute nell' ordine primitivo facendole circolare insieme una dipendentemente dall' altra. Noi chiameremo d'ora innanzi queste leggi. *Leggi semplici d' alterazione*.

L' altra classe sarà di quelle leggi che formano delle cose contenute nell' ordine primitivo diversi sistemi, facendole circolare in ciascuno di essi le une dipendentemente dall' altre, ma senza che il giro delle cose di un sistema abbia nulla che fare col giro delle cose degli altri. Verranno esse chiamate da noi col nome di *Leggi composte di alterazione*. Ed è manifesto che in questa seconda classe dovranno comprendersi eziandio que' casi ove siano delle cose che non cambino posto, considerando che ciascuna di esse fornisca un sistema particolare di una unica cosa.

34. Relativamente al giro prodotto dalle leggi della prima classe, noi abbiam fatto conoscere tutti i metodi necessarii per isciogliere ogni quesito che far si possa onde rintracciarne l' indole e le proprietà, sicchè ci sembra che non resti quasi nissuna cosa da desiderarsi su quest' argomento. Ma dopo che le cognizioni acquistate in questa materia ci hanno finalmente permesso di stabilire fra le leggi di alterazione la precedente distinzione, fa ora mestieri per condurre a fine il nostro proposito, che insegniamo adesso ad applicare que'metodi medesimi anche alle leggi composte, il che non solo debb' esser sempre possibile, ma debbe anzi sempre potersi facilmente, come si può prevedere dal non essere in sostanza una legge composta altra cosa che l'aggregato di più leggi semplici.

35. E prima di tutto, per ciò che si appartiene alla operazione, colla quale si trova il giro di una cosa qualunque, data che sia legge di alterazione, ci accorgeremo a dirittura, che essa non debbe soffrire verun cangiamento nel caso eziandio di una legge composta. Noi ne abbiamo l' esperienza negli esempii del §. 33. Ma ove se ne richiegga una prova derivata dai principii, noi ci riporteremo al raziocinio dei §§. 15. e 16. dal quale abbiam ricavato tutto il processo dell' operazione. Ivi si osserverà come d' esso non si fondi nè punto nè poco sulla supposizione, che le cose contenute nell' ordine primitivo abbiano tutte quante da dipendere nel loro giro le une dalle altre: ma supposto che di dette cose alcune abbiano la prefata dipendenza, esso si arresta alla considerazione soltanto di queste, prescindendo dalle altre. E quel raziocinio dunque, e la operazione che ne conseguita, debbono di necessità convenire a ciascun sistema particolare che venga formato dalle leggi composte.

36. Non ci arresteremo dunque su questo proposito più di quello che basti per additare un metodo semplicissimo da tenersi per ricercare i giri di tutte le cose quando sian molte, affine di non ommetterne alcuna. E lo dichiareremo più speditamente valendoci di un esempio.

Si richiegga il giro di tutte le cose dell'ordine O secondo la legge I (Tav.ª 33.ª),

S' incominci dal trovare il giro della cosa 1 , che sarà quello che si vede notato nella Tavola . Tutti i numeri del medesimo si notino in O coll' asterisco * .

Si prosegua ora cercando il giro della prima cosa non anche notata in O che sarà la 2. Desso sarà quello che si è indicato nella tavola : e i numeri che contiene si contrassegnino in O coi due asterischi * * .

Si trovi similmente il giro della 8 che adesso sarà la prima delle cose non anche notate in O . Il suo giro è quello della tavola ; e s' intendano tolti i suoi numeri da O contrassegnandoli coi tre asterischi ⁎⁎⁎ .

Finalmente si cerchi il giro della 13 che in O rimane non contrassegnata , e si tolga da O la cifra del suo giro cioè la (13) contrassegnandola con ⁎⁎⁎⁎ . E dopo questo non rimanendo più cifra in O che non sia contrassegnata , ne concluderemo che tutte sono state considerate , e sarem certi di avere senza sbaglio trovato il giro di tutte le cose . E ne avremo , ove ci occorra , una nuova sicurezza , se contando i numeri che compongono tutti i giri li troveremo essere in punto altrettanti quante sono le cose .

37. In secondo luogo la dimostrazione del §. 19. essendo generalissima , debb' applicarsi anch' essa senza riguardo alle leggi composte . Sarà dunque vero di ciascuno de' varii sistemi ch' essi formano, ciò che lo era per un sistema unico, vale a dire , che in ognun d' essi trovato il giro di una cosa , si potrà da questo inferirne il giro di tutte le altre del medesimo sistema sempre colla regola del §. 16.

Quindi ritornando all' esempio precedente del giro dell' 1 , che è (3), (7), (9), (11), (4), (6), (1), concluderemo quello della 3 dover essere (7), (9), (11), (4), (6), (1), (3), e quello della 7 dover essere (9), (11), (4), (6), (1), (3), (7), e similmente operando troveremo la tavola 35.ª dei giri tutti delle cose assegnate dall' ordine O Tav.ª 34.ª secondo la legge I .

38. Ma se per le leggi composte ha luogo sempre il §. 19., debbono per esse derivarne egualmente le conseguenze e i comodi che ne resultavano per le semplici. Se dunque dato il problema precedente, sarà questione di sapere quale sarà il posto che una cosa p. e. la 9 occuperà dopo un certo numero di alterazioni p. e. dopo 34, cercheremo prima di tutto il suo giro da quello della 1 che si troverà essere (11), (4), (6), (1), (3), (7), (9), (Tav.ª 31). E trovatolo di 7 termini concluderemo che di VII. sarà pure il periodo delle colonne. Ciò fatto divideremo il numero dato delle alterazioni 34 per 7, onde averne il resto 6. Conteremo poi nel dato giro 6 termini, cioè quanti ne restano dopo il 9, tornando a capo, e numerando da sinistra a destra: e veduto che il (7) si è il posto a cui va il 9 dopo 6 alterazioni, concluderemo che la cosa 9 dopo 34 alterazioni, ossia nella XXXIV.ª colonna occuperà il posto (7). Questo metodo come ognun vede è sempre il medesimo che quello dei §§. 20, 21, 22.

39. Ed in quest'altra classe di leggi servirà egualmente la regola del §.24. Quando viceversa si tratti di sapere in quali colonne la cosa 9 p. e. sarà per occupare un dato posto v. g. il (3), conformandoci a quello, non avremo che ad osservare dal suo giro (11), (4), (6), (1), (3), (7), (9) che detto posto essendo distante 5 termini da 9, dovrà venire occupato da essa dopo 5 alterazioni; ossia che la 9 andrà ad occupare la prima volta il (5) nella colonna V.ª, e ne concluderemo poi che la 9 conseguirà detto posto in tutte le colonne indicate dal numero $7n + 5$.

Ma se si fosse invece domandato della stessa cosa 9, in qual colonna essa occuperà il posto (5), oppur il posto (8), siccome nè il (5) nè il posto (8) si trovano nel suo giro (11), (4), (6), (1), (3), (7), (9), si sarebbe dovuto rispondere, che in nessuna. Ora questo caso che avviene quì, non può succedere giammai quando le leggi sono della prima classe, nei quali il giro di tutte le cose contiene sempre tutti quanti i posti. In quelle prime leggi non vi ha dunque posto ove una

cosa non debba andar la sua volta. Nelle leggi composte per l' opposito vi ha dei posti ove certe cose non arrivano mai; questa differenza meritava di essere avvertita.

40. Ma ciò che vi ha di più interessante, si è che addattandosi anche alle leggi composte tutte le precedenti verità, ne conseguita necessariamente che debbe loro appartenere non meno quel metodo di ricavare dal giro di alcuna delle cose la serie tutta delle file orizzontali che formano le colonne delle alterazioni, metodo che ai §§. 27, 28. abbiam dimostrato dover essere generalmente esatto, anche ove i numeri indici de' posti non fossero consecutivi, dacchè ivi per dinotarli ci siamo prevalsi di lettere in cambio di cifre. Gioverà nondimeno che ne facciamo la esperienza, non già per riportarne una maggior sicurezza, ma per farci carico di alcune particolarità di questi casi composti, le quali fa di mestieri conoscere a compimento della presente teorica.

Prendiamo per amor di chiarezza il problema indicato dalla Tav.ª 36.ª Onde applicarvi il metodo del §. 27. per trovare le file orizzontali che compongono le colonne: dal giro (4), (3), (2), (1) della 1, e dall' altro (7), (6), (2), della 2 si formi la tavola di tutti i giri, che si vede nella parte A della Tav.ª 36. Da questi giri poi si ricaveranno la fila 3, 5, 4, 1 da scriversi in O a destra dell' (1), la fila 6, 7, 2 da scriversi contro il (2), la fila 5, 4, 1, 3 da scriversi contro il (3), e così via discorrendo successivamente sinchè siano esauriti tutti i giri, e rimanga compita la Tav.ª 37. delle alterazioni.

Ora se porteremo la nostra attenzione sulla medesima, ci apparirà a dirittura che nessuna delle cose 1, 3, 4, 5 si trova mai nelle file (2)ª, (6)ª, e (7)ª, e che nessuna delle cose 2, 6, 7, si trova mai nelle file (1)ª, (3)ª, (4)ª e (5)ª. Nè maraviglia: conciossiachè non incontrandosi nel giro delle prime cose giammai i posti (2), (6), (7), ciò sarà segno che desse per le condizioni del problema non potranno occuparli giammai. E per egual ragione nessuna delle cose 2, 6, 7

potrà trovarsi giammai nei posti (1), (3), (4), (5), i quali rimangono esclusi dal loro giro.

Il sistema dunque delle cose 1, 3, 4, 5 non potrà produrre altre file orizzontali che quelle che sono di contro ai posti (1), (3), (4), (5) nella parte B della Tav. 37, e l' altro sistema delle cose 2, 6, 7 non potrà produrre altre file che quelle che sono di contro ai posti (2), (6), (7) nella parte C della Tav. suddetta, e dall' unione di dette file ne risulterà poi la tavola descritta sotto la lettera A.

Se ora si considerino individualmente le parti B e C che contengono le file orizzontali del sistema 1, 3, 4, 5 la prima, e del sistema 2, 6, 7 la seconda, si troverà che in B l' ordine primitivo si ripristina quando la cosa 1 torna nella colonna IV. al posto che aveva in O: e parimenti nella seconda parte C si vedrà riprodotto l' ordine primitivo quando la 2 nella colonna III. va ad occupare il posto già tenuto da principio in O. E se congiungendo addesso queste file col porle di contro ai posti convenienti se ne formerà la tavola A, indi si pareggieranno le colonne riempiendo i vuoti delle file (2)[a], (6)[a], (7)[a] colle lettere che si rinnovano come si vede in B, si troverà in quest' ultima tavola che quantunque la 1 sia tornata nella colonna IV. al posto che aveva in O, non per questo in essa colonna si ripristina l' ordine primitivo interamente, come accadeva sempre quando prendevamo a trattare delle leggi semplici di alterazione.

41. Qualche cosa di somigliante a ciò che abbiamo or ora osservato avviene eziandio, quando si vogliono nelle leggi composte assegnare le colonne verticali deducendole immediatamente dai giri delle cose dei diversi sistemi colla regola del §. 30. Imperciocchè se stando al problema precedente, dal giro (4), (5), (3), (1), vorremo ricavare p. e. la colonna III. noi non ne otterremo che la parte A della Tav.[a] 38.[a] E se vorremo egualmente dedurre la medesima colonna dal giro (7), (6), (2) dell' altro sistema, noi non ne ricaveremo che l' altra parte B della tavola medesima. Sicchè per avere la

colonna III. intera come si cerca, bisognerà comporla di entrambe le sue parti A, e B come si vede eseguito in C. E questo metodo sarà quello che seguiremo qualora ci occorrerà di trovare le colonne verticali deducendole dai giri dei diversi sistemi; vale a dire che troveremo le singole parti della cercata colonna, che appartengono a ciascun sistema, e di tutte queste comporremo poi la colonna intera, e ciò a dirittura in pratica, e senza bisogno di formare tutte le tavole A, B, C, che quì si sono prodotte unicamente per chiarezza. In questa guisa potremo formare le colonne tutte del primo periodo, dalle quali se ne inferiranno poi facilmente tutte l' altre che talora si vorranno conoscere.

42. Anche per questa strada dunque si troverà ciò che abbiam veduto dover accadere nella fine del §. 40. Imperciocchè volendosi p. e. la colonna IV. se ne dovrà cercare la parte che nasce dal giro (4), (5), (3), (1), la quale sarà quella che abbiamo notato nella parte A della Tav.[a] 39[a]; se ne dovrà indicare la parte che nasce dal giro (7), (6), (2) che sarà la descritta in B della stessa tavola; e queste due parti congiunte insieme formeranno la colonna cercata, che sarà tale come si vede in C. Ora ponendo mente alla medesima, si vedrà che sebbene siasi repristinato in essa l'ordine primitivo del primo sistema, non si è poi repristinato contemporaneamente anche quello del secondo. D'onde avrassi a concludere come sopra, che nelle leggi composte non sempre avviene che si repristini l'ordine, quando alcuna delle cose torna ad occupare quello stesso posto che da principio occupava in O, come accade sempre nelle alterazioni prodotte da leggi semplici.

ARTICOLO VI.

Modo di determinare per le leggi semplici, e composte il numero delle alterazioni, o vogliam dire delle colonne, necessario perchè si rinnovi l'ordine primitivo. Aggiunta alla regola con cui si formano le colonne verticali da servire, quando il periodo delle alterazioni sia soverchiamente lungo.

43. La proprietà che siamo riusciti a conoscere per due vie nel finire dell' articolo precedente, fa nascere una curiosità, che di certo è la più interessante che risvegliar si possa in questa materia, ed al soddisfacimento di cui noi dirigevamo già sin da principio in modo più speciale gli studii tutti della presente Memoria.

Si è già dimostrato al §. 12. che posto un ordine primitivo O di una quantità finita di cose, ed una legge d'alterazione qualunque P per cui nascano da O successivamente le colonne C, P, Q, R, S, ec. (Tav.ª 16.ª) non si può a meno, continuando le alterazioni, che una qualche volta non si torni a riprodurre la stessa prima colonna O, da cui ricominci poi il medesimo periodo di colonne C, P, Q, R, S ec. ottenutosi da principio. Si tratta dunque addesso di trovare, come dati l'ordine primitivo e la legge d'alterazione, si possa in ogni problema determinare a dirittura il numero d' alterazioni, o quello delle colonne, che saranno necessarie per fare che l' ordine primitivo torni a rinnovarsi.

Un sì fatto problema, che affrontato di primo incontro affaccerebbe delle difficoltà, si renderà facile e piano per noi addesso che abbiam scrutinata intimamente l' indole propria de' giri che seguir debbono le cose.

44. E facendoci prima di tutto a considerare i problemi dependenti da leggi semplici di alterazione supponiamo un tal ordine O, ed una tal legge I. (Tav.ª 40.ª parte A.) che

se ne ricavi per la cosa a il giro $(h), (g), (f), (d), (c), (b), (a)$. Colla regola del §. 19. noi saremo sempre in grado di ricavare i giri di tutte le altre cose e di formarne la tabella che si vede sotto la lettera B: e trattandosi di leggi semplici sapremo che ciascuno di que' giri si fa per tanti posti nè più nè meno, quante sono le cose (§. 18.) Laonde ciascuna cosa per compiere il proprio giro avrà un egual numero di posti da percorrere: e siccome tutte cominciano il proprio giro contemporaneamente, dovranno pure contemporaneamente terminarlo: e lo termineranno dopo un numero di alterazioni o di colonne eguale a quello dei posti, o delle cose.

Ma dalla ispezione dei giri della Tav.ª 37.ª parte B, apparisce che ciascuna cosa al terminare del proprio giro si trova al posto che da prima occupava nell' ordine O. Dunque ciascuna cosa tornerà al posto di prima dopo il prefato numero d' alterazioni. Dunque finalmente nei problemi dependenti da leggi semplici di alterazione, avverrà sempre che si rinnovi l'ordine primitivo dopo un numero di alterazioni, o di colonne eguale a quello dei posti, o delle cose assegnate. Qualora adunque ci venga addomandato in quante alterazioni sarà per rinnovarsi l'ordine primitivo di n cose considerate in un problema, il primo passo da muoversi sarà quello di assicurarci, se la legge di alterazione sia della prima classe, ovvero della seconda. Renduti certi che dessa sia delle semplici, diverrà allora soperchio ed inutile del tutto che ci perdiamo ad esplorarne l' indole particolare: poichè qualunque siasi questa per essere, noi dovremo sempre affermare che il numero cercato sarà quello stesso n delle cose, o dei posti.

Ma se per l' opposito si scuoprisse che la legge stabilita appartiene alla classe delle composte, in quel caso per dare una precisa risposta ci converrà di por mente alle considerazioni che siamo per intraprendere.

45. I sistemi particolari delle leggi composte egualmente che gli unici delle semplici, hanno tutti le proprietà

descritte al §. 17, e quindi può ai medesimi tutti applicarsi sempre il raziocinio del §. precedente. Se avremo dunque una legge composta di più sistemi l' uno p. e. di m, l' altro di n, ed un terzo di p cose ec. potremo con sicurezza affermare, che l' ordine primitivo del primo sistema si ristabilirà dopo m, quello del secondo dopo n, e quello del terzo dopo p alterazioni, o colonne. Ovvero per essere più chiari, se descriveremo il giro delle cose tutte del problema come siam soliti con una serie di colonne O, I, II, III . . . . . . M^{ma} . . . . N^{ma} . . . . P^{ma} (supposto $p > n > m$), saremo sicuri, che nella colonna M^{ma} si conterrà ristabilito l' ordine primitivo del primo sistema: che nella colonna N^{ma} si conterrà restabilito quello del secondo sistema; e che finalmente, quello del terzo si conterrà ristabilito nella colonna P^{ma}, e così va discorrendo se vi fossero dell' altre colonne e degli altri sistemi. Ci è già caduto sott' occhio un esempio di tutto ciò nel §. 40.

Ora se i numeri m, n, p ec. siano tutti disuguali fra loro, è manifesto che nessuno dei prefati sistemi potrà la prima volta repristinare il proprio ordine primitivo nella stessa colonna, ove lo ristabilirà qualcuno degli altri.

Ma nella continuazione indefinita delle alterazioni i prefati sistemi non ristabiliscono già il loro ordine una volta sola; ma sappiam anzi che ciascun d' essi debbe indispensabilmente rinnovarlo, ogni volta che sia compiuto un numero d' alterazioni multiplo di quello delle cose che lo compongono.

Generalmente dunque, se propostoci un problema qualsivoglia appartenente ad una legge composta, da cui prendano origine diversi sistemi di m, di n, di p, di q ec. cose, verremo addimandati di determinare in quali colonne, o dopo quante alterazioni si ristabilirà l' ordine primitivo generale, affermeremo che di certo dovrà rinnovarsi dopo un numero $mnpqr$ . . ., perchè questo prodotto è appunto multiplo di tutti quanti i numeri m, n, p, q, r . . . . che esprimono le quantità delle

cose dei diversi sistemi; e soggiugneremo di più, che tale ristabilimento si dovrà poi sempre ripetere, compiuti tutti que' numeri di alterazioni che saranno multipli del medesimo prodotto m, n, p, q, r . . . . . ec.

Se il quesito cadesse sopra l' esempio del §. 40. la legge del quale forma due sistemi uno di tre, l' altro di quattro cose, noi risponderemo che in esso l' ordine primitivo debbe ristabilirsi dopo 12 ed in generale dopo $12 \times n$ alterazioni. E che ciò avvenga di fatti, potrà ognuno convincersene seguitando a formar le colonne della Tavola 41.[a] sino alla 12[a] inclusive.

46. Ma se la questione sarà di sapere quel numero di alterazioni che occorre per ristabilire l' ordine primitivo la prima volta, non sarem già sempre sicuri di rispondere esattamente proferendo il citato prodotto $mnpqr$ . . . ec. dei numeri delle cose dei diversi sistemi: conciossiacchè possono darsi talora dei numeri multipli di tutti gli altri m, n, p, p, r, i quali siano nondimeno minori del prodotto $mnpqr$ . . . Ed è poi evidente per se stesso che alla domanda così ristretta, risponde soltanto il più picciolo dei numeri suddetti.

Per essere quindi a portata di risolvere questa specie di quistioni proposte in simil guisa, che è la più comune di farle, non basta solamente che si sappia rinvenire un multiplo di tutti i numeri m, n, p, q, r . . ., ma conviene altresì che di tutti que' multipli si sappia assegnare il più piccolo. E qualora i numeri m, n, p, q, r siano tutti primi fra loro, è già noto abbastanza che il picciolissimo fra i multipli di tutti que' numeri si è appunto lo stesso prodotto $mnpqr$ . . . . Ma quando non siano primi, l' aritmetica ci mostra una via di trovarlo, che ci piace quì di ricordare.

47. Si sciolga allora ogni fattore del prodotto $mnpqr$ ne' suoi fattori semplici: dal loro complesso se ne cancellino tanti che nessun d' essi si trovi replicato. Il prodotto che si otterrà di tal maniera sarà il ricercato.

Sia p. e. $m = \alpha\beta\gamma$, $n = \beta\gamma\delta\varepsilon$, $p = \alpha\gamma\delta\mu$, $q = \beta\gamma\delta\mu\nu$, $r = \gamma\delta\nu$

dal complesso di tutti questi fattori $\alpha\beta\gamma\beta\gamma\delta\varepsilon$, $\alpha\gamma\delta\mu\beta\gamma\delta\mu\nu\gamma\delta\nu$, toltene le quantità che si replicano, si otterrà il prodotto $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\mu\nu$, che sarà appunto il numero che si vuole.

Ma se i fattori de' numeri m, n, p, q, r .... si trovino elevati a potenze; allora di un medesimo fattore si conserverà la potenza più alta una volta sola, e si cancelleranno tutte le eguali e le inferiori.

Sia $m = \alpha^2\beta^2\gamma^3$, $n = \alpha^3\gamma^4\delta^2\varepsilon^2$; $p = \delta^4\mu^3\gamma^2$; $q = \beta^5\varepsilon^2\delta^2\mu^2$; $r = \alpha^4\gamma^5\delta^4$. Ponendo in pratica questa regola il prodotto $\alpha^2\beta^2\gamma^3\alpha^3\gamma^4\delta^2\varepsilon^2\delta^4\mu^3\gamma^2\beta^5\varepsilon^2\delta^2\mu^2\alpha^4\gamma^5\delta^4$ si ridurrà a divenire $\alpha^4\beta^5\gamma^4\delta^4\varepsilon^2\mu^3$ che sarà il numero richiesto.

E nel caso poi che i fattori dei citati numeri fossero in parte semplici, in parte elevati a potenza, onde ottenere il minor multiplo possibile di tutti, è cosa chiara che si dovranno adoperare entrambe queste regole congiuntamente.

48. Diamo quì due esempii che saranno abbastanza per render famigliare la soluzione di questa specie di problemi.

PRIMO ESEMPIO.

Abbiasi un mazzo di carte disposte come si vuole. Distinguiamo la carta che sta sopra a tutte col n.° 1., quella che vien dopo col n.° 2., e così per ordine sino alla più bassa che quindi dovrà contrassegnarsi col n.° 40.

Pigliamo poi la prima di esse e soprapponendovi l' ultima mettiamole entrambe sulla tavola. Indi prendiamo la seconda e soprapponendovi la penultima mettiamole sulle prime due. Similmente presa la terza e soprappostavi l'antepenultima, mettiamole entrambe sopra le altre quattro, e così proseguiamo in questa operazione finhè vi son carte. Questo problema verrà rappresentato dall' ordine primitivo O, e dalla legge di alterazione I (Tav.ª 42ª parte A), e chi ne dubitasse potrà facilmente riscontrarlo col fatto.

Ora volendo noi sapere in quante alterazioni sarà per

ritornare la prima volta l'ordine primitivo, dovremo condurci così. Cerchiamo il giro della cosa 1 che troveremo venire rappresentato dalla serie B.

Poichè fra' numeri che lo compongono manca prima di tutto il 2, cerchiamone il giro che sarà denotato dalla serie C.

Similmente poichè non si trova in nessuno de' giri B, C il 5, cerchiamo anche il giro della cosa 5 che sarà il descritto in D.

Finalmente poichè ne' prefati giri non si trova il 14, cercandone il giro E troveremo che essa sta ferma.

Di tal maniera trovati colla scorta del §. 36. tutti questi giri, e assicuratici coll' incontro F che altri non ve ne ha, saremo venuti in cognizione che la legge I produce quattro sistemi; il primo di $27=3^3$ il secondo di $9=3^2$, il terzo di 3, ed il quarto di 1 cose. Concluderemo dunque che l'ordine primitivo debbe di certo rinnovarsi dopo un numero di alterazioni $= 3^3 \times 3^2 \times 3 \times 1$, o ciò che è lo stesso dopo un sì fatto numero di colonne.

Ma perchè noi cerchiamo il numero delle alterazioni che lo restituisce la prima volta, colla regola seconda del §. 47. cancellate dal prefato prodotto tutte le potenze del 3 minori della terza, lo ridurremo ad essere $3^3 \times 1 = 27$, e quindi risponderemo, che nel citato caso l' ordine primitivo tornerà a ricomparire la prima volta dopo 27. alterazioni.

SECONDO ESEMPIO.

Sia l' ordine primitivo O, e la legge d' alterazione I, e cerchisi al solito dopo quante alterazioni si rinnoverà l' ordine O Tav.ª 43. parte A.

Cerco al solito colla regola del §. 36. il giro delle cose, 1, 2, 3, 4, ec. che trovo appartenere a' sistemi independenti. Questi giri saranno B di 7; C di 10; D di 11; E di 12 posti. Preparo il prodotto $2 \times 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$ dei fattori de' diversi numeri de' posti, che nascono ne' prefati giri,

e cancellato il 2 (§. 47) ottengo $2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 4620$, che sarà il minimo numero di alterazioni necessario perchè l' ordine O si riproduca.

49. Col metodo che abbiamo pur ora insegnato potremo dunque assegnar sempre quel numero di alterazioni che occorrerà, perchè in qualsivoglia problema l' ordine primitivo ritorni. Ora questo numero debbe essere il medesimo che abbisogna, perchè si rinnovelli un' altra colonna qualsivoglia. Conciossiachè, avendosi a riprodurre col proseguir delle alterazioni lo stesso periodo di colonne con un ordine costante §. 12., si rende indispensabile che ognuna di esse sia sempre egualmente distante dalla sua eguale, come ogni colonna O è distante da un' altra O. Trovate dunque una volta tutte le colonne O.I.II.III....M, che formano il periodo, noi saremo in istato di saper dire di ciascuna di esse, dopo qual numero di alterazioni saranno per rinnovarsi, e potremo assegnare eziandio la colonna che dovrà corrispondere ad un dato numero qualunque di alterazioni che sia maggiore di quello delle colonne che formano il periodo, supposto sempre che l' intero periodo sia conosciuto.

50. Per ciò che riguarda il primo di questi quesiti, se M è il numero delle alterazioni necessario per far restituire l' ordine primitivo, noi scorgeremo senza difficoltà che una qualunque colonna R si riprodurrà dopo $M + R$, $2M + R$, $3M + R$, e generalmente dopo $SM + R$ alterazioni, rappresentando S un numero intero qualunque.

51. Volendosi poi col secondo quesito sapere, quale sarà la colonna del primo periodo che corrisponderà ad un dato numero di alterazioni 7M, non si avrà altro a fare, che di dividere M per N onde trovarne un resto R, perchè allora questo numero R sarà l' indice della colonna del primo periodo, che dovrà riprodursi eseguite che siano le proposte N alterazioni.

52. Tutto sta dunque nel saper assegnar le colonne tutte quante del primo periodo, intorno a che abbiamo già veduto due maniere facili di riuscire ai §§. 27. 31. per le leggi

semplici, ed ai §§. 40. 41. per le leggi composte, formandole colle file orizzontali e colle colonne col semplice ajuto, in entrambi i casi, delle serie dei posti che indicano i giri delle cose. Conviene per altro confessare che i metodi che abbiam dato sinquì, riuscirebbero assai fastidiosi, ove si trattasse di problemi il cui primo periodo fosse soverchiamente lungo, come per mò d'esempio il problema 2° del §. 48. che ha il periodo di 4620 colonne.

Se in esso si volesse trovare la colonna 4385.^{ma} stando alle regole date, affine di conoscere la cosa che nella medesima sarebbe per occupare un dato posto: e.g. il 1.^{mo} bisognerebbe cominciar a contare a sinistra nel giro (13), (17), (24), (28), (37), (39), (1), principiando dal (39) e tornando a capo quante volte occorresse 4385. termini, onde arrivare a quel numero che indicasse la cosa cercata. E questa operazione sarebbe da replicarsi per tutti gli altri posti di detto giro; e si dovrebbe compiere nel modo conveniente anche per tutti gli altri posti degli altri sistemi; fatica che si soprapporrebbe a qualunque pazienza la più esercitata. Ad evitare pertanto questo troppo grave incomodo, sarà prezzo dell'opera che si corredino quegli stessi metodi insegnati di alcune avvertenze, colle quali se ne possa facilitar moltissimo la esecuzione, quando si tratti di quesiti, che abbiano periodi considerabilmente lunghi.

53. Supponiamo dunque tuttavia d'aver a formare la colonna 4385.^{ma} del problema secondo del §. 48. Facendoci a contare a norma di ciò che si disse nel §. 30. sul giro della 1, che è (13), (17), (24), (28), (37), (39), (1) i 4385 termini, onde trovare la cosa che occuperà in essa colonna il posto (1), è manifesto che sempre che cominciando dal (39), avrò percorso, tornando anche a capo, un numero di termini multiplo di 7., sarò sempre ritornato al (39) d'ond'era partito. Vi sarò ritornato dunque ancora quando avrò numerati 626×7 termini. E perchè $4385 = 626 \times 7 + 3$, per compiere il numero, non mi resteranno a contar più che tre soli termini. Laonde del numero 4385. la parte 626×7 è del tutto inutile

per la presente ricerca, bastando solo che si conosca il resto 3, dal quale viene determinato il modo di conoscere le cose che occupar debbono i posti dal giro della 1 nella colonna 4385.ma

Quindi nasce una regola generale da osservarsi in questi casi. Volendosi p.e. la colonna K.ma in un problema che formi diversi sistemi di S, S', S'' ec. cose, si dividerà K per S e poi per S', indi per S'' ec. e si terrà conto dei resti di queste divisioni che supporremo essere rispettivamente r, r', r'' ec. E questi resti indicheranno ciascuno nel giro del relativo sistema quanti termini dovranno contarsi a sinistra di ciascun posto, per trovare il numero indice della cosa che dovrà occuparlo nella collonna assegnata.

Rendasi chiaro tutto ciò con un esempio. Cerchisi nel problema del §. 48, quale sarà per essere la colonna 4385.ma essendo il giro B di 7, il C di 10, il D di 11, e l'E di 12 posti Tav.a 44.a

RISOLUZIONE.

Dviso il numero 4385 per	7	saranno i resti	3
	10		5
	11		7
	12		5

Dunque nel sistema	B	la cifra	3	indica che ogni posto appartiene alla cosa indicata dal n.° che lo precede di	3	termini
	C		5		5	
	D		6		7	
	E		5		5	

Se pertanto si troveranno con questo metodo le cose da porsi contro ciascun posto della colonna O, e si scriveranno sotto l'indice 4385.mo formeremo delle medesime.

Col sistema	B	quella parte della colonna che è segnata cogli asterischi	*
	C		**
	D		***
	E		****

ARTICOLO VII.

Applicazione de' metodi precedenti alla risoluzione de' quesiti dependenti da più leggi di alterazione, che agiscano alternativamente.

54. Abbiansi addesso due leggi diverse O . I', ed O . I'' (Tav.ª 45.ª parte A) e queste si adoperino di maniera, che da O si ricavi la colonna I colla prima, e dalla colonna I la II colla seconda legge. Indi di nuovo dalla II si ricavi la terza III colla legge O . I', e dalla III la IV colla legge O . I''; e così alternativamente si continui a ricavare le colonne dispari dalle pari colla legge O.I', e le pari dalle dispari colla legge O.I'', finchè si ricada nell' ordine primitivo (parte B), come accade ora nella colonna XII. Se ci verrà domandato di risolvere anche questo problema in tutte quelle medesime questioni da noi già determinate nei problemi assoggettati ad una sola legge, ci ripromettteremo di riuscirvi colla scorta degli stessi metodi, purchè ci si permetta di aggiungere ad essi le regole che siamo per esporre nell' articolo presente.

55. La prima e più interessante proprietà di questo genere di problemi e da cui parte ogni via di risolverli si è la seguente. Se invece di applicare all' ordine O della parte B la legge O . I' per averne la colonna I, e poi la legge O I'' alla colonna I per averne la II, si fosse applicata a dirittura la legge O.I''' (parte A) allo stesso ordine O (parte B), si sarebbe senza dubbio ottenuta la medesima colonna II di prima. Produce dunque il medesimo effetto l' applicare ad una colonna qualunque la legge O . I''' oppure applicarvi la legge O . I' per ottenerne una colonna intermedia, da cui ricavarne poi un' altra colla legge O . I''. In entrambi questi casi le colonne alle quali si arriva sono perfettamente identiche.

Da questa verità debbe poi necessariamente risultarne quest' altra, cioè che se ottenutasi la colonna II vi si seguiterà

ad applicare la prefata legge O.I‴ dovranno consecutivamente ottenersi le colonne IV, VI, VIII, ec. ossia tutte le colonne d'indice pari, che si ottenevano prima per effetto delle due leggi O . I′, O . I″, come di fatto si vede succedere nella parte C della tavola.

In tutte quelle circostanze adunque, nelle quali ci sarà bastante di avere le colonne pari, non avremo a prevalerci delle leggi O.I′, ed O.I″, se non quanto occorre per formar la colonna II della parte B. Ottenutasi questa e formata della medesima coll' applicarla all' ordine O la nuova legge O . I‴, questa sola basterà poi per trovare tutte le altre colonne d'indice pari.

56. Si manifesta quindi la strada da seguirsi per arrivare a scuoprire il numero di alterazioni necessarie in questa specie di problemi per ricadere nell' ordine primitivo. Imperciocchè colla norma dei §§. 44. e 46. questo numero potrà sempre rinvenirsi per la legge O . I‴ applicata ad O (parte B) . Ma la tavola delle alterazioni conveniente al problema proposto debbe contenere un numero di colonne doppio del numero delle colonne pari . Dunque il numero delle alterazioni cercato, si troverà raddopiando il numero delle alterazioni che si sarà trovato necessario per repristinare l'ordine, supposto che agisca la sola legge O . I‴. Questa legge O . I‴ poi non è altra cosa che l'applicazione della colonna ottenuta, dopo che si sono fatte agire una volta le leggi di alterazione assegnate nel problema all' ordine O .

Esempio. Date le leggi O . I′ ed O . I″ (Tav.ª 46.ª parte A) da applicarsi alternativamente all' ordine O ed alle colonne che via via nasceranno (p.ᵉ B) si cerca il numero di alterazioni necessarie perchè si repristini l' ordine primitivo .

Per risolvere questo problema si applichi ad O (p.ᵉ B) la legge O . I′ e se ne ricavi la colonna I, che sarà la stessa che I′, ed a questa si applichi la legge O . I″, e se ne ricavi la colonna II . Ciò fatto dall' ordine O, e dalla colonna II si formi la legge O . II (p.ᵉ C) .

Da questa legge O . II si ricavino i giri delle cose descritti nella p.^{e} D, e dai medesimi colla regola dei §§. 44. e 46, si potrà determinar sempre il numero delle alterazioni, che occorrono perchè si repristini l' ordine O nel problema dipendente dalla sola legge O . I'', e dovrà questo essere $3 \times 2 \times 1 = 6$. Ora il numero delle colonne necessarie per questa legge, si sa dover essere la metà di quello necessario per le due leggi, come sopra si è detto. Dunque raddoppiando il 6, si troverà il 12 che sarà quel n.^{o} che si cercava pel problema delle due leggi combinate.

Nella pratica, potendosi ricavare i giri descritti in D immediatamente dalla colonna II applicata ad O, e considerata come legge, si può risparmiare di scrivere la parte C della tavola, che abbiamo quì notato per amor di chiarezza.

57. Se le leggi fossero tre O . I', O . I'', O . I''' (Tav.^{a} 47. parte A), se ne formerebbero facilmente le tre colonne I, II, III, (p.^{e} B), e compostane la legge O . III, (p.^{e} C) se ne ricaverebbero i giri D.

Dai giri poi co' metodi insegnati non si durerebbe fatica a riconoscere, che il numero cercato per la legge O.III, debbe essere 4. Laonde ragionando come sopra se ne inferirebbe che per repristinare l' ordine primitivo, quando si fanno operare alternativamente tutte tre le leggi, detto numero debb' essere $4 \times 3 = 12$.

E senza perderci di più stabiliremo anzi generalmente che se le leggi proposte per un certo problema saranno N, la risoluzione del quesito proposto da principio si otterrà nel modo seguente.

Primo. Colle leggi proposte applicate per ordine alla colonna O e a quelle che nasceranno, si formeranno le prime N colonne.

Secondo. Dell' ordine O, e della N composta una nuova legge O . N si cercherà per questa il numero di alterazioni necessario a repristinar l' ordine O.

Terzo. Supposto che questo numero si trovi essere M se

ne inferirà finalmente, che il n.° cercato pel problema in cui agiscono alternativamente le date leggi N viene sempre espresso dal prodotto NM.

58. L'operazione colla quale negli esempii del §. precedente abbiamo applicata la prima legge alla O per ottenerne la colonna I: la seconda legge alla I per averne la II: la terza alla II per ottenerne la terza III, e così via via finchè ci erano leggi, diverrà necessaria spessissimo ne' problemi che intraprendiamo a trattare. Per contenerla adunque in poche parole, noi la chiameremo d'ora innanzi *sviluppo delle leggi* o semplicemente *sviluppo*.

E la legge che abbiamo formata coll'applicazione dell'ultima colonna all'ordine primitivo O, si chiamerà in appresso *legge resultante* od anche solo *resultante*.

59. Date due leggi O . I', O . I'' (Tav.ª 48. p.ᵉ A) se si troverà la resultante O . II (p.ᵉ B), col mezzo della stessa si potranno ottener sempre tutte le colonne d'indice pari (p.ᵉ C). Ma si vede egualmente che se aggiunta allo sviluppo B la colonna III formeremo di essa, e dell'ordine primitivo non naturale O . I una nuova resultante O. I. III., si potrà col mezzo di questa trovar anche tutte le colonne d'indice dispari (p.ᵉ D), cosicchè intromettendo poi quest' ultime alle prime se ne otterrà tutta intera la tavola delle alterazioni (p.ᵉ E) .

Per tal modo un problema assoggettato a due leggi alternative si potrà sempre col mezzo di resultanti dividere in altri due problemi, ciascuno de' quali dipenda da una sola legge costante.

E ciò che si è detto nel caso di due leggi si estenderà facilmente ad un altro numero maggiore. Imperciocchè avendosi le quattro leggi O. I', O. I'', O. I''', O. Iᵛ, (Tav. 49 p.ᵗᵉ A) se si eseguirà lo sviluppo, e aggiunte al medesimo poi le colonne V, VI, VII (p.ᵉ B.) se ne formeranno le quattro resultanti O. IV; O. I. V; O. II. VI; O. III. VII (p.ᵉ C, D, E, F,) e dalla prima si ricaveranno tutte le colonne che hanno l' indice della forma $4n$ (p.ᵉ G), dalla seconda quelle che hanno

l'indice della forma $4n + 1$ (p.^{e}H), dalla terza quelle il cui indice ha la forma $4n + 2$ (p.^{e} L), e finalmente dalla quarta legge le colonne che corrispondono ad un indice della forma $4n + 3$ (p.^{te} M) nelle quali forme si contiene appunto il complesso di tutte le colonne possibili.

E potendola discorrere allo stesso modo se le leggi fossero ancor di più, arriveremo a concludere generalmente, che un problema assoggettato ad un numero qualunque di leggi N che agir debbano alternativamente una dopo l'altra, può sempre dividersi in un numero N di problemi dipendenti ciascuno da una sola legge costante, e che questo si ottiene col mezzo delle risultanti da ritrovarsi conformemente a quello che si è insegnato.

60. Secondo dunque che la tavola delle alterazioni si farà nascere dalla successiva applicazione delle leggi assegnate, oppure dalle resultanti composte col loro mezzo, gli indici delle colonne verranno rappresentati da numeri maggiori, o minori. Imperciocchè si vede facilmente che le colonne che ricavate nel primo modo erano la V, la IX, la XIII, ec. diverranno la I, la II, la III ec. se si dedurranno dalla resultante O. I. V, e similmente che la VI, la X, la XIV, ec. della prima specie diverranno la I, la II, la III, deducendole dalla resultante O. II. V, e così dicasi delle altre.

Apparisce adunque che i numeri degli indici sono diversi secondo le diverse maniere di ricavar le colonne. Affine di distinguerli quando faccia mestieri, noi chiameremo *assoluti* gli indici della prima specie, e *relativi* quei della seconda. Considerando dunque una colonna p. e. la XXVII, diremo che XXVII è il suo indice assoluto, e che il VI è il suo indice relativo, perchè la prefata colonna è la XXVII in ordine, quando venga ricavata dalla successiva applicazione delle leggi assegnate ed è poi soltanto la VI, quando venga derivata dalla legge resultante O. III. VII.

61. Procediamo ora a rintracciare il metodo per conoscere il giro di una cosa, quando il problema è assoggettato

a più leggi alternative, e per dichiararlo, vagliamoci di un esempio. Siano le quattro leggi descritte nella (Tav.^{a} 49. p.^{te} A) e si domandi quale sarà per riuscire il giro dell' I. Le operazioni necessarie per ritrovarlo sono le seguenti (Tav.^{a} 50.).

Primo. Siccome in tutti questi giri le stesse cifre si ripetono più volte, per non estendere nè di troppo, nè di poco il giro che si cerca, gioverà di conoscere avanti il numero dei termini che debbono comporlo sinchè si torni a rinnovare, il qual numero, come si sa, è eguale a quello delle colonne del primo periodo. Eseguito dunque lo sviluppo B, e ricavatane la resultante O. IV. (p.^{te} C), da questa colla scorta dei §§. 56. 57. si arriverà prima di ogni altra cosa a conoscere che il n.° dei termini del giro debb' essere $= 6 \times 4 = 24$.

Secondo. Dalle leggi assegnate (p.^{te} A) si ricaveranno i giri delle cose tutte, sinchè in ciascuna di esse rimangano esauriti tutti i posti dell' ordine O, e questi si scriveranno come si vede in D distintamente: cioè sotto E quei giri che nascono dalla legge O.I', sotto F quelli che nascono dalla legge O.I'', sotto G quelli che nascono dalla legge O.I''', e finalmente sotto H quelli che nascono dalla legge O.I^{iv}.

Terzo. Si cercherà a destra in E il posto che viene subito dopo (1) che è (6): in F quello che vien subito dopo (6) che è (5): in G quello che vien subito dopo (5) che è (3): in H quello che vien subito dopo (3) che è (4), e de' numeri trovati (6), (5), (3), (4), si formerà il primo gruppo del giro, che si scriverà in L.

Similmente si cercherà indi in E il posto prossimo al (4), che è (3): in F il prossimo al (3) che è (4): in G il prossimo al (4) che è (2): in H il prossimo al (4) che è (5); e si aggiungerà colle cifre trovate al primo gruppo sotto L il secondo (3), (4), (2), (5).

E proseguendo questa semplicissima operazione si continuerà tanto che se ne ottengano sei gruppi di posti, formando la serie L di 24. termini, la quale descriverà il giro cercato, sin là dove comincia poi a replicarsi.

Noi abbiamo trattato costà un problema di quattro leggi. Ma se si fosse avuto per le mani un problema di N leggi, si sarebbe proceduto nella stessa maniera con queste sole differenze: 1.° che lo sviluppo B sarebbe stato di N colonne: 2.° che i giri delle cose sarebbero stati di N categorie, cosicchè rimanessero espressi tutti quelli che nascono da ogni legge in una categoria particolare: 3.° che i gruppi della serie L si sarebbero composti ciascuno di N termini.

62. Anche in questi problemi assoggettati a più leggi si può dal giro di una cosa ritrovare il giro di tutte le altre che circolano con essa. La difficoltà consiste, essendo ordinariamente nel giro di una cosa ripetuta più volte la cifra di cui si tratta, di trovare il luogo nel quale sarà da fissarsi la origine del giro; difficoltà che verrà tolta di mezzo da una semplice considerazione. Sia dato lo stesso giro L dell' esempio precedente (Tav.ª 51.)

Egli è manifesto che il primo passo che fa ciascuna delle cose, si è sempre per effetto della prima legge O . I'. Se dunque dato il giro L della 1 si vorrà sapere quello della 2, bisognerà cercare la 2 in quel punto del giro in cui sta per agire sulla medesima la legge O . I'.

Chi pigliasse p. e. a cominciare il suo giro nel gruppo 2.°, e ponesse per primo posto da occuparsi da essa il (5) errerebbe di certo; conciossiachè la 2 passa ivi in (5) per effetto della legge O . I'''.

Se si considererà similmente la cifra 2 nel 5.° e nel 6.° gruppo, si troverà che dessa passa nei posti consecutivi sempre per opera di leggi diverse da O . I', e si vedrà che opera sopra di essa la legge O . I' solamente quando passa dall' ultimo luogo del gruppo 3.° al primo del 4.°

Ora ciò che si è detto della cifra 2 conviene a qualunque altra. Allorchè dunque dal giro L di una cosa vorrà ricavarsi quello di un' altra qualunque che circoli seco, dovrà cercarsi quando detta cosa sia per passare da un gruppo all' altro consecutivo; poichè solo in quel punto agisce sopra di

essa la legge O . l' il che vale lo stesso che dire, che bisognerà trovare ove detta cosa occupi l'ultimo posto di un gruppo, e cominciare a notar il suo giro dal gruppo che segue immediatamente, continuando a scrivere tutti gli altri gruppi per ordine, e ritornando a capo sintanto che rimangano notati tutti quanti sono, formando così una serie di posti che esprimerà il giro cercato. Di tal maniera arriveremo a conoscere che il giro della 2 si è M, che quello della 4 si è N, e così pure si potranno determinare tutti i rimanenti.

Abbiamo addottata la precedente spiegazione, siccome la più opportuna per dare una idea dell' indole di questi giri. Del resto colla osservazione che ogni giro di qualsivoglia cosa debbe terminar sempre colla cifra che rappresenta la medesima, saremmo più presto arrivati alla medesima conseguenza.

63. Da queste osservazioni derivano naturalmente queste altre. Poichè la serie che esprime il giro di una cosa, debbe servire ad esprimere ancora gli altri giri delle cose che circolano seco, converrà che la stessa sia composta di tal maniera che ognuna delle cose che circolano insieme, si trovino una volta sola nell'ultimo luogo di alcuno de' gruppi che ne costituiscono le parti. Occorre dunque che i prefati gruppi siano tanti nè più nè meno quante sono le cose che appartengono ad uno stesso giro. Dacchè nasce la conseguenza generale, che se le leggi assegnate saranno di numero m e se si saprà che le cose che entrano in un dato giro sono di numero n, il numero de' posti che ciascuna di esse dovrà percorrere prima di ricominciare il giro da capo sarà indubitatamente $m\,n$. E se si tratterà poi di determinare quali siano le cose che circolano insieme dal giro dato di una delle medesime; queste si troveranno tutte notando le cifre che stanno nell' ultimo luogo di ciascun gruppo del giro.

64. Dal §. 62. si riconosce ancora che ogni cosa termina il suo giro quando è arrivata nell' ultimo posto di un qualche gruppo, per la ragione appunto che da quel luogo debbe necessariamente ricominciarlo di nuovo. Ora questo essendo,

noi potremo nel ricercare il giro di una cosa dispensarci dalla briga di riconoscere il numero delle colonne che formano il periodo, come avevamo prescritto al §. 61., affine di non porre nè più nè meno termini della serie de' posti che formano il giro che si ricerca. E basterà soltanto che poniam mente di sospenderla, subito che la cosa di cui si tratta, si troverà la prima volta nel luogo estremo di qualche gruppo, sicuri che così il giro rimarrà perfettamente compiuto.

65. Dal giro delle cose ne' problemi assoggettati a più leggi non si possono ricavare immediatamente le file orizzontali per costruire la tavola delle alterazioni. In questi casi per ottenerle, varrà la regola seguente che applicheremo all' esempio dei §§. precedenti (Tav.^{a} 52.).

Primo. Eseguito lo sviluppo B, si aggiungano al medesimo tante colonne meno una quante sono le leggi, cioè nel caso nostro tre colonne.

Secondo. Di queste si formino gli ordini O.I, O.II, O.III non naturali, e si compongano successivamente le risultanti E, F, G, applicando all' ordine, O ed a quegli altri per leggi le colonne V, VI, VII, e questi si scrivano in E, F, G, presso la prima risultante O.IV. che sta sotto D.

Terzo. Dalle resultanti si trovino tutti i giri H, L, M, N, che nascono di ciascuna (§§. 15. 25.).

Quarto. Dal giro H si determini quale sarà il numero delle colonne, o delle alterazioni necessarie per repristinar l' ordine O, e nel caso presente si troverà detto numero essere $= 6 \times 4 = 24$. (§. 57.)

Quinto. Si scrivano i posti dell' ordine O verticalmente ed i 24. indici delle colonne come si vede in V.

Sesto. Premesse queste operazioni si potrà scrivere qualunque fila si vorrà, tenendo le norme quì appresso. Prendasi per fissar le idee, a descrivere la fila (4).

Primo. Dal giro H si ottenga la serie conveniente per la sua quarta fila. Sarà la stessa 1, 3, 6, 2, 5, 4.

Secondo. Si ottengano queste medesime serie per gli altri giri. Queste si troveranno.

Pel giro H. 4, 1, 3, 6, 2, 5.

Pel giro L. 1, 3, 6, 2, 5, 4.

Pel giro M. 4, 1, 3, 6, 2, 5. (§. 29.)

Terzo. I termini della serie prima si scrivano in V per ordine sotto gl'indici IV, VIII, XII, e sotto tutti gli altri della forma $4n$.

Quelli della seconda sotto gli indici V, IX, XIII, e tutti gli altri della forma $4n + 1$.

Quelli della terza sotto gli indici VI, X, XIV, e tutti gli altri della forma $4n + 2$.

Quelli finalmente della quarta si scrivano sotto gli indici VII, XI, XV, e sotto tutti gli altri della forma $4n + 3$.

Quarto. Nella distribuzione delle tre ultime serie avanzerà in ciascheduna sempre una cifra che si ommetterà di scrivere, perchè apparterrebbe alle colonne ulteriori XXV, XXVI, XXVII. I tre primi posti poi della fila che rimangon vuoti, si riempiranno colle cifre che ad essa convengono tolte dallo sviluppo B.

Un tale esempio lascia abbastanza vedere come dovremmo comportarci, se il problema fosse assoggettato ad un numero qualunque di leggi maggiore, o minore. Siccome abbiam praticato in molte occasioni, farem presente anche quì che nella pratica si possono affrettare ed abbreviare di molto le operazioni, che quì siamo stati obbligati di porre per disteso, affinchè distinguendole nelle sue parti, ne facessimo meglio comprendere la ragione.

65. Le quattro operazioni colle quali abbiamo incominciato la risoluzione del problema precedente, si rendono necessarie in moltissimi altri casi. Affine pertanto di poterci dispensare dal descriverle ad una ad una quando dovremo farne uso, le comprenderemo in avvenire tutte sotto la denominazione di preparamenti, sicchè viceversa quando c' imbatteremo in questo vocabolo, si dovrà sapere da noi che

per esso viene indicato tutto il complesso di quelle quattro operazioni.

66. Più semplice e spedita d'assai riesce la risoluzione dell'ultimo problema che ci rimane da esaminare per dar compimento alla presente teorica, quello cioè per cui date le leggi di alterazione si cerca di determinare una colonna, ovvero una alterazione di un indice qualunque.

Per trattar la cosa generalmente, prendiamo a considerare un problema assoggettato ad M leggi che agiscano alternativamente, e compiuti i preparamenti del §. 65. proponiamoci di determinare la sua colonna K^{ma}. Ecco con quali mezzi potremo riuscirvi.

Primo. Avanti tutto sarà da ricercarsi quale sarà la resultante da cui può derivare la prefata colonna K, e per conoscerlo basterà rintracciare quale delle forme MN, MN + 1, MN + 2, MN + 3 ec. abbia il n.° K. Imperciocchè se ha la prima, la colonna K dipenderà dalla resultante O . M, se ha la seconda dipenderà dalla resultante O.I . (M + I) : dipenderà dalla resultante O.II . (M + II) se ha la terza, e così si discorra del resto.

Secondo. Se il n.° K è minore del numero della colonna del primo periodo, che supporremo P, la colonna K si troverà fra quelle del primo periodo col metodo del §. 52. Ma se K>P, sarà da cercarsi in 2° luogo, a qual colonna del primo periodo debba esser identica la colonna K, e ciò si otterrà dividendo K per P, onde trovarne il resto R, che sarà sempre l' indice assoluto della colonna del primo periodo che è identica colla K.

Terzo. Tutto ciò eseguito, rimarrà da sapersi quale sia l'indice relativo (§. 60) della resultante determinata da principio, da cui deriva la K. E per iscoprirlo, converrà mettere R.^{to} sotto quella delle forme Mn, $Mn + 1$, $Mn + 2$, $Mn + 3$ ec. che potrà appartenergli (la quale sarà necessariamente la stessa che aveva il n.° K): e trovatala, in ogni caso il numero n sarà sempre quello dell'indice relativo che si ricerca.

Quarto. Per tal modo il problema sarà ridotto alla ricerca della colonna $n.^{ma}$ che deriva dalla resultante determinata da principio; ricerca che si compirà facilmente colle regole dei §§. 30, 31, e colle osservazioni del §. 60.

Applichiamo questi precetti ad un caso pratico. Sia l'esempio solito della tav.^{a} 50. soggetto alle quattro leggi A, e compiuti i preparamenti B, coll'aggiunta di tre colonne (§. 59.), e ricercate le leggi, e i giri D, E, F, G, H, L, M, N, (Tav.^{a} 53) cerchisi la colonna 1043.^{a} Sarà in questo caso

$$K = 1043, \ M = 4, \ P = 24.$$

Primo. Poichè $1043 = 260 \times 4 + 3$, si vede ben tosto che la colonna che cerchiamo debbe derivarsi dalla quarta resultante O.III.VII descritta sotto G.

Secondo. Essendo $1043 > 24$, eseguita la divisione del p.^{o} pel secondo numero, si troverà $1043 = 43 \times 24 + 11$. Per la qual cosa XI sarà l'indice della colonna del p.^{o} periodo identica colla cercata.

Terzo. Avendosi poi $11 = 4 \times 2 + 3$, sarà II l'indice relativo della colonna che si dovrà derivare dalla legge G, onde ottenerne la cercata.

Quarto. Ricavando dalla legge G la colonna II troveremo ch'essa riesce quella che si trova descritta in V. La colonna 1043. che si cercava sarà dunque la medesima che si legge in V. sotto l'indice II.

62. Stimiamo opportuno di aggiungere per comodo dei curiosi di queste ricerche le risoluzioni di varii problemi, ad ottener le quali sarà mestieri di porre in opera tutti i precetti spiegati nel decorso della presente Memoria.

Sia pertanto un mazzo di 40 carte disposte per ordine così che la 1^a stia in cima di tutte e l'ultima 40^a tocchi la tavola. Queste si alterino alternativamente per ordine colle seguenti quattro leggi.

Prima legge. Pongasi sulla tavola la 1.^{a} carta indi sopra la 40^a: poi sopra la seconda 2^a e indi la 39^a; poi sopra la 3^a ed indi la 38^a, e così sino al fine.

Seconda legge. Si pongano sulla tavola le 1^a, 2^a e indi sopra la 40^a; poi sopra la 3^a, $4.^a$ e indi sopra la 39^a; poi sopra le 5^a 6^a e indi sopra la 38^a; e così sino al fine.

Terza legge. Si pongano sulla tavola le 1^a, 2^a, $3.^a$ e poi sopra la 40^a: poi sopra le 4^a, 5^a, 6^a, ed indi la 39^a; poi sopra le 7^a 8^a 9^a, ed indi sopra la 38^a; e così sino al fine.

Quarta legge. Si pongano sulla tavola le 1^a, 2^a, 3^a, 4^a e poi la 40^a; poi sopra le 5^a, 6^a, 7^a, 8^a, e indi sopra la 39^a; poi sopra le 9^a, 10^a, 11^a, 12^a, indi sopra la $38.^a$ e così sino alla fine.

Si domanda per un tal problema,

Primo il numero di alterazioni necessario per restituire l' ordine primitivo?

Risposta. Il numero cercato sarà 2932. (§ 56.)

Secondo. Si domanda di determinare il giro della carta 1^a sino a che si cominci di nuovo?

Risposta il giro dell' 1^a cercato sarà

(40). (38).1° (29). (5). (32). (14).2° (23). (13).
(16). (18).3° (18). (19). (4). (36).4° (21). (15).
(12). (24).5° (10). (29). (17). (16).6° (20). (17).
(8). (30).7° (2). (39). (37). (29).8° (3). (38).
(35). (23).9° (11). (28). (15). (19).10° (16). (22).
(3). (37).11° (25). (10). (22). (9).12° (30). (4).
(34). (20).13° (15). (23). (5). (34).14° (13). (25).
(9). (28).15° (4). (37). (33). (17).16° (19). (18).
(6). (33).17° (9). (30). (19). (13).18° (24). (12).
(18). (15).19° (22). (14). (14). (21).20° (14). (24).
(7). (31).21° (1). (40). (39). (35).22° (17). (20).
(2). (39).23° (33). (1). (§. 61.).

Terzo. Si dimanda di ricavare dal giro della 1^a quello della 15?

Risposta. Il giro della 15. sarà

(12). (24).1° (10). (29). (17). (16).2° (20). (17).

(8). (30).3° (2). (39). (37). (29).4° (3). (38). ec.

(§. 62).

Quarto determinare quali siano le cose che circolano insieme nel giro trovato del secondo problema?

Risposta. Le cose
1, 4, 5, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 40. (§. 63).

Quinto. Determinare una delle file orizzontali p. e. la (1), sino a che essa torni nel primo posto?

Risposta. La fila cercata sarà la seguente

21, 34, 29, 20; 21, 16, 14, 40; 21, 23, 12, 24;
21, 3, 30, 24; 21, 6, 10, 12; 21, 9, 37, 30;
21, 11, 25, 18; 21, 25, 23, 37; 21, 2, 4, 25;
21, 32, 10, 23; 21, 26, 24, 4; 21, 8, 28, 10;
21, 36, 38, 22; 21, 34, 39, 28; 21, 16, 17, 38;
21, 33, 29, 39; 21, 3, 15, 17; 21, 6, 19, 29;
21, 9, 13, 15; 21, 11, 5, 19; 21, 35, 1 . . .
(§. 65).

Sesto. Determinare quale riuscirà la colonna, ovvero la alterazione 6371.ma?

Risposta. La colonna cercata sarà la seguente.

37.	19.	40.	26.
5.	27.	23.	33.
13.	38.	14.	30.
28.	25.	4.	8.
16.	39.	29.	34.
35.	15.	36.	2.
32.	18.	9.	21.
3.	24.	7.	6.
10.	22.	12.	31.
20.	1.	17.	11.

(§. 66).

Noi non prolungheremo più oltre questa Memoria che ci è cresciuta sotto la penna molto al di là di quello che ci proponevamo da principio, e quasi a nostro malgrado. Ma confessiamo che non avremmo saputo contenerla entro limiti più ristretti, senza lasciare la presente teorica incompleta in qualche sua parte, formando un lavoro imperfetto, e per un picciol risparmio di pena gettando tutto il resto della fatica, quando s'avvicinava presso al suo termine. Del rimanente le regole che abbiamo esposte possono bastare non solo pei casi che abbiam trattato, ma per moltissimi altri eziandio più difficili e più complicati. Resterebbe ora che ne mostrassimo alcune applicazioni curiose, ma in altro tempo potranno le medesime offerirci il soggetto di un nuovo lavoro.

1.[a]	
O'	
I.	C.
II.	A.
III.	E.
IV.	D.
V.	B.

TAV	
O	
I.	A.
II.	B.
III.	C.
IV	D.
V.	E.

TAVOLA 5.[a]		
O		P
I. D = a		C = b
II. C = b		E = d
III. A = c		D = a
IV. E = d		B = e
V. B = e		A = c

6.[a]
P'
B.
D.
A.
E.
C.

TA	
O	
p.	c
I	1
II	2
III	3
IV	4
V	5.

TAVOLA 10.[a]				
O	I	II	III	IV
(1).	3.	2.	4.	5.
(2).	4.	5.	1.	3.
(3).	2.	4.	5.	1.
(4).	5.	1.	3.	2.
(5).	1.	3.	2.	4.

TAVOLA 1.[a]

O			O'	
I.	A.		I.	C.
II.	B.		II.	A.
III.	C.		III.	E.
IV.	D		IV.	D.
V.	E.		V.	B.

TAVOLA 2.[a]

O		P	Q	R
I.	A.	C.	E.	D.
II.	B.	A.	C.	E.
III.	C.	E.	D.	B.
IV	D.	B.	A.	C.
V.	E.	D.	B.	A.

TAVOLA 3.[a]

O		P
I.	A.	C.
II.	B.	E.
III.	C.	D.
IV.	D.	B.
V.	E.	A.

TAVOLA 4.[a]

O'		P'
I.	D.	A.
II.	C.	B.
III.	A.	E.
IV.	E.	C.
V.	B.	D.

TAVOLA 5.[a]

O			P
I.	$D = a$		$C = b$
II.	$C = b$		$E = d$
III.	$A = c$		$D = a$
IV.	$E = d$		$B = e$
V.	$B = e$		$A = c$

TAVOLA 6.[a]

O'			P'
I.	A.		B.
II.	B.		D.
III.	C.		A.
IV.	D.		E.
V.	E.		C.

TAVOLA 7.[a]

O		P
p.	*c*	
I	1.	3.
II	2.	4.
III	3.	2.
IV	4.	5.
V	5.	1.

TAVOLA 8.[a]

O	P
1.	3.
2.	4.
3.	2.
4.	5.
5.	1.

TAVOLA 9.[a]

O	P	Q	R	S
1.	3.	2.	4.	5.
2.	4.	5.	1.	3.
3.	2.	4.	5.	1.
4.	5.	1.	3.	2.
5.	1.	3.	2.	4.

TAVOLA 10.[a]

O	I	II	III	IV
(1).	3.	2.	4.	5.
(2).	4.	5.	1.	3.
(3).	2.	4.	5.	1.
(4).	5.	1.	3.	2.
(5).	1.	3.	2.	4.

TAVOLA 11.[a]		
O		P
p.	*c*	
(1).	4.	3.
(2).	3.	1.
(3).	1.	5.
(4).	5.	2.
(5).	2.	4.

TAVOLA 12.[a]	
O.	I.
(1).	2.
(2).	1.
(3).	4.
(4).	3.
(5).	6.
(6).	5.

TAVOLA 13.[a]	
O.	I.
(1).	6.
(2).	1.
(3),	2.
(4).	3.
(5).	4.
(6).	5.

O	TAVOLA 14.[a]					
p.	*c*	P	Q	R	S	T
I	1	:*	:*	:*	:*	:*
II	2	:*	:*	:*	:*	:*
III	3	:*	:*	:*	:*	:*
IV	4	:*	:*	:*	:*	:*
V	5	:*	:*	:*	:*	:*
:*	:*	:*	:*	:*	:*	:*
:*	:*	:*	:*	:*	:*	:*
:*	:*	:*	:*	:*	:*	:*

O	TAVOLA 15.[a]						
p.	*c*	P	Q	R	S	P	Q
I.	1.	:*	:*	:*	:*	:*	:*
II.	2.	:*	:*	:*	:*	:*	:*
III.	3.	:*	:*	:*	:*	:*	:*
IV.	4.	:*	:*	:*	:*	:*	:*
V.	5.	:*	:*	:*	:*	:*	:*
:*	:*	:*	:*	:*	:*	:*	:*
:*	:*	:*	:*	:*	:*	:*	:*
:*	:*	:*	:*	:*	:*	:*	:*

6.[a]			
P	Q	R	C
:	:	:	:
*	*	*	1
:	:	:	:
*	*	*	2
:	:	:	:
*	*	*	3
:	:	:	:
*	*	*	4
:	:	:	:
*	*	*	5
:	:	:	:
*	*	*	*
:	:	:	:
*	*	*	*
:	:	:	:
*	*	*	*

TAVOL				
O		P	Q	V
I	1.	3.	5.	.
II	2.	1.	3.	.
III	3.	5.	4.	.
IV	4.	2.	1.	.
V	5.	4.	2.	.

TAVOLA 19.[a]	
O	P
(1).	3.
(2).	1.
(3).	5.
(4).	2.
(5).	4.

C

pei
i } (2). (4). (5). (3). (1).
posti

o.[a]		
(3).	(1).	A
(1).	(2).	B
(5).	(3).	C
(2).	(4).	D
(4).	)5).	E

	a
Giro della cosa }	h
	a
	b
	c
	d
	f

TAVOLA 23.[a]	
O.	I.
(1).	5.
(2).	6.
(3)	2.
(4).	1.
(5).	3.
(6).	4.

O

TAVOLA 16.ª

p	c	P	Q	R	C	P	Q	R	C
		:	:	:	:	:	:	:	:
I.	1	*	*	*	1	*	*	*	1
		:	:	:	:	:	:	:	:
II.	2	*	*	*	2	*	*	*	2
		:	:	:	:	:	:	:	:
III.	3	*	*	*	3	*	*	*	3
		:	:	:	:	:	:	:	:
IV.	4	*	*	*	4	*	*	*	4
		:	:	:	:	:	:	:	:
V.	5	*	*	*	5	*	*	*	5
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

TAVOLA 17.ª

	O	P	Q	R	S	O
I	1.	3.	5.	4.	2.	1.
II	2.	1.	3.	5.	4.	2.
III	3.	5.	4.	2.	1.	3.
IV	4.	2.	1.	3.	5.	4.
V	5.	4.	2.	1.	3.	5.

TAVOLA 18.ª

	O	P	Q	R	S	T	V
I	1.	3.	.	.	.	.	.
II	2.	1.	.	.	.	.	.
III	3.	5.	.	.	.	.	.
IV	4.	2.	.	.	.	.	.
V	5.	4.	.	.	.	.	.

TAVOLA 19.ª

O	P
(1).	3.
(2).	1.
(3).	5.
(4).	2.
(5).	4.

C

C. Giro della cosa { pei 1 posti } (2). (4). (5). (3). (1).

TAVOLA 20.ª

Giro della cosa	1.	pei posti	(2). (4). (5). (3). (1).	A
	2.		(4). (5). (3). (1). (2).	B
	3.		(1). (2). (4). (5). (3).	C
	4.		(5). (3). (1). (2). (4).	D
	5.		(3). (1). (2). (4).)5).	E

TAVOLA 21.ª

Giro della cosa	*h*	pei posti	(*a*). (*b*). (*c*). (*d*). (*f*). (*h*).
	a		(*b*). (*c*). (*d*). (*f*). (*h*). (*a*).
	b		(*c*). (*d*). (*f*). (*h*). (*a*). (*b*).
	c		(*d*). (*f*). (*h*). (*a*). (*b*). (*c*).
	d		(*f*). (*h*). (*a*). (*b*). (*c*). (*d*).
	f		(*h*). (*a*). (*b*). (*c*). (*d*). (*f*).

TAVOLA 22.ª

O.	I.
(1).	5.
(2).	6.
(3).	2.
(4).	1.
(5).	3.
(6).	4.

TAVOLA 23.ª

O.	I.
(1).	5.
(2).	6.
(3)	2.
(4).	1.
(5).	3.
(6).	4.

TAVOLA 25.[a]

O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
(*a*).	*b.*	*g.*	*d.*	*f.*	*c.*	*a.*
(*b*).	*g.*	*d.*	*f.*	*c.*	*a.*	*b.*
(*c*).	*a.*	*b.*	*g.*	*d.*	*f.*	*c.*
(*d*).	*f.*	*c.*	*a.*	*b.*	*g.*	*d.*
(*f*).	*c.*	*a.*	*b.*	*g.*	*d.*	*f.*
(*g*).	*d.*	*f.*	*c.*	*a.*	*b.*	*g.*

B

II.	III.	IV.	V.	VI.
a.	*c.*	*f.*	*d.*	*b.*
c.	*f.*	*d.*	*b.*	*g.*
f.	*d.*	*b.*	*g.*	*a.*
b.	*g.*	*a.*	*c.*	*f.*
d.	*b.*	*g.*	*a.*	*c.*
g.	*a.*	*c.*	*f.*	*d.*

is)

TAVOLA 28.[a]

O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
(*a*).	*	*	*	*	*	*b.*
(*b*).	*	*	*	*	*	*g.*
(*c*).	*	*	*	*	*	*a.*
(*d*).	*	*	*	*	*	*c.*
(*f*).	*	*	*	*	*	*d.*
(*g*).	*	*	*	*	*	*h.*
(*h*).	*	*	*	*	*	*f.*

30.[a]

I.
3.
2.
6.
4.
1.
5.

TAVOLA 31.[a]

O.	I.
(1).	7.
(2).	6.
(3).	1.
(4).	2.
(5).	3.
(6).	4.
(7).	5.

TAVOLA 24.ª

Giro della cosa { *a. b. c. d. f. g.* } pei posti {

(*c*).	(*f*).	(*d*).	(*g*).	(*b*).	(*a*)
(*a*).	(*c*).	(*f*).	(*d*).	(*g*).	(*b*)
(*f*).	(*d*).	(*g*).	(*b*).	(*a*).	(*c*)
(*g*).	(*b*).	(*a*).	(*c*).	(*f*).	(*d*)
(*d*).	(*g*).	(*b*).	(*a*).	(*c*).	(*f*)
(*b*).	(*a*).	(*c*).	(*f*).	(*d*).	(*g*)

TAVOLA 25.ª

O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
(*a*).	*b.*	*g.*	*d.*	*f.*	*c.*	*a.*
(*b*).	*g.*	*d.*	*f.*	*c.*	*a.*	*b.*
(*c*).	*a.*	*b.*	*g.*	*d.*	*f.*	*c.*
(*d*).	*f.*	*c.*	*a.*	*b.*	*g.*	*d.*
(*f*).	*c.*	*a.*	*b.*	*g.*	*d.*	*f.*
(*g*).	*d.*	*f.*	*c.*	*a.*	*b.*	*g.*

TAVOLA 26.ª

O.		I.
p	*c*	
(*a*).	*b.*	*g.*
(*b*).	*g.*	*a.*
(*c*).	*a.*	*c.*
(*d*).	*f.*	*d.*
(*f*).	*c.*	*f.*
(*g*).	*d.*	*b.*

B

O.		I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
p.	*c*						
(*a*).	*b.*	*g.*	*a.*	*c.*	*f.*	*d.*	*b.*
(*b*).	*g.*	*a.*	*c.*	*f.*	*d.*	*b.*	*g.*
(*c*).	*a.*	*c.*	*f.*	*d.*	*b.*	*g.*	*a.*
(*d*).	*f.*	*d.*	*b.*	*g.*	*a.*	*c.*	*f.*
(*f*).	*c.*	*f.*	*d.*	*b.*	*g.*	*a.*	*c.*
(*g*).	*d.*	*b.*	*g.*	*a.*	*c.*	*f.*	*d.*

TAVOLA 27.ª

O.	I.	II.	III.
(*a*).	*b.*		
(*b*).	*g.*		
(*c*).	*a.*		
(*d*).	*f.*		
(*f*).	*c.*		
(*g*).	*d.*		

TAVOLA 27.ª (bis)

O.	I.	II.	III.
(*a*).	*b.*	*g.*	
(*b*).	*g.*	*d.*	
(*c*).	*a.*	*b.*	
(*d*).	*f.*	*c.*	
(*f*).	*c.*	*a.*	
(*g*).	*d.*	*f.*	

TAVOLA 28.ª

O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
(*a*).	*	*	*	*	*	*b.*
(*b*).	*	*	*	*	*	*g.*
(*c*).	*	*	*	*	*	*a.*
(*d*).	*	*	*	*	*	*c.*
(*f*).	*	*	*	*	*	*d.*
(*g*).	*	*	*	*	*	*h.*
(*h*).	*	*	*	*	*	*f.*

TAVOLA 29.ª

O.	I.	II.	III.	IV.	V.	
p.	*c*					
(*a*).	*	*	*	*	*	*d.*
(*b*).	*	*	*	*	*	*b.*
(*c*).	*	*	*	*	*	*f.*
(*d*).	*	*	*	*	*	*g.*
(*f*).	*	*	*	*	*	*a.*
(*g*).	*	*	*	*	*	*c.*

TAVOLA 30.ª

O.	I.
(1)	3.
(2)	2.
(3)	6.
(4)	4.
(5)	1.
(6)	5.

TAVOLA 31.ª

O.	I.
(1).	7.
(2).	6.
(3).	1.
(4).	2.
(5).	3.
(6).	4.
(7).	5.

TAVOLA 33.[a]

I.		
6.	Giro della 1 pei posti	(3). (7). (9). (11). (4). (6
12:		
1.		
11.	Giro della 2 pei posti	(10). (14). (5). (12). (2).
14.		
4.	Giro della 8 pei posti	(15). (8)
3.		
15.		
7.	Giro della 13 pei posti	(13)
2.		
9.		
5.		
13.		
10.		
8.		

34.[a]

. (7). (9). (11). (4). (6). (1).

)). (14). (5). (12). (2).

5). (8).

3).

TAVOLA 32.ª	
O.	I.
(1).	7.
(2).	3.
(3).	11.
(4).	8.
(5.)	12.
(6).	2.
(7).	1.
(8).	9.
(9).	4.
(10).	10.
(11).	6.
(12).	5.

TAVOLA 33.ª			
	O.	I.	
*	(1).	6.	Giro della 1 pei posti (3). (7). (9). (11). (4). (6). (1).
**	(2).	12:	
*	(3).	1.	
*	(4).	11.	Giro della 2 pei posti (10). (14). (5). (12). (2).
**	(5).	14.	
*	(6).	4.	Giro della 8 pei posti (15). (8)
*	(7).	3.	
***	(8).	15.	
*	(9).	7.	Giro della 13 pei posti (13)
*	(10).	2.	
*	(11).	9.	
**	(12).	5.	
****	(13).	13.	
*	(14).	10.	
***	(15).	8.	

TAVOLA 34.ª		
O.	I.	
(1).	6.	Giro della 1 pei posti (3). (7). (9). (11). (4). (6). (1).
(2).	12.	
(3).	1.	Giro della 2 pei posti (10). (14). (5). (12). (2).
(4).	11.	
(5).	14.	Giro della 8 pei posti (15). (8).
(6).	4.	
(7).	3.	Giro della 13 pei posti (13).
(8).	15.	
(9).	7.	
(10).	2.	
(11).	9.	
(12).	5.	
(13).	13.	
(14).	10.	
(15).	8.	

5.[a]

). (11). (4). (6). (1).
). (4). (6). (1). (3).
). (7). (9). (11). (4).
). (9). (11). (4). (6).
). (6). (1). (3). (7).
). (1). (3). (7). (9).
). (3). (7). (9). (11).

(5). (12). (2).
(10). (14). (5).
(12). (2). (10).
(14). (5). (12).
(2). (10). (14).

TAVOLA 37.[a]

A

I.	II.	III.	IV.
3.	5.	4.	1.
6.	7.	2.	
5.	4.	1.	3.
1.	3.	5.	4.
4.	1.	3.	5.
7.	2.	6.	
2.	6.	7.	

B

I.	II.	III.	IV.
3.	5.	4.	1.
5.	4.	1.	3.
1.	3.	5.	4.
4.	1.	3.	5.

C

I.	II.	III.
6.	7.	2.
7.	2.	6.
2.	6.	7.

D

I.	II.	II.	IV.
4.	5.	3.	1.
6.	7.	2.	6.
5.	4.	1.	3.
1.	3.	5.	4.
4.	1.	3.	5.
7.	2.	6.	7.
2.	6.	7.	2.

TAVOLA 35.ª

Giro	1.	pei	(3).(7).(9).(11).(4).(6).(1).
	3.		(7).(9).(11).(4).(6).(1).(3).
	4.		(6).(1).(3).(7).(9).(11).(4).
delle	6.	po-	(1).(3).(7).(9).(11).(4).(6).
	7.		(9).(11).(4).(6).(1).(3).(7).
	9.		(11).(4).(6).(1).(3).(7).(9).
cose	11.	sti	(4).(6).(1).(3).(7).(9).(11).

Giro	2.	pei	(10).(14).(5).(12).(2).
	5.		(12).(2).(10).(14).(5).
delle	10.	po-	(14).(5).(12).(2).(10).
	12.		(2).(10).(14).(5).(12).
cose	14.	sti	(5).(12).(2).(10).(14).

Giro delle cose	8.	pei po- sti	(15).(8).
	15.		(8).(15).

Giro della cosa	13.	al po- sto	(13).

TAVOLA 36.ª

O.	I.		A		
(1).	3.	Giro	1.	pei	(4).(5).(3).(1).
(2).	7.		2.		(7).(6).(2).
(3).	5.		3.		(1).(4).(5).(3).
(4).	1.	delle	4.	po-	(5).(3).(1).(4).
(5).	4.		5.		(3).(1).(4).(5).
(6).	2.		6.		(2).(7).(6).
(7).	6.	cose	7.	sti	(6).(2).(7).

TAVOLA 37.ª

O.	I.	II.	III.	IV.
(1).	3.	5.	4.	1.
(2).	6.	7.	2.	
(3).	5.	4.	1.	3.
(4).	1.	3.	5.	4.
(5).	4.	1.	3.	5.
(6).	7.	2.	6.	
(7).	2.	6.	7.	

TAVOLA 37.ª

A

O	I.	II.	III.	IV.
(1).	3.	5.	4.	1.
(2).	6.	7.	2.	
(3).	5.	4.	1.	3.
(4).	1.	3.	5.	4.
(5).	4.	1.	3.	5.
(6).	7.	2.	6.	
(7).	2.	6.	7.	

B

O.	I.	II.	III.	IV.
(1).	3.	5.	4.	1.
(2).				
(3).	5.	4.	1.	3.
(4).	1.	3.	5.	4.
(5).	4.	1.	3.	5.
(6).				
(7).				

C

O.	I.	II.	III.
(1).			
(2).	6.	7.	2.
(3).			
(4).			
(5).			
(6).	7.	2.	6.
(7).	2.	6.	7.

D

O.	I.	II.	II.	IV.
(1).	4.	5.	3.	1.
(2).	6.	7.	2.	6.
(3).	5.	4.	1.	3.
(4).	1.	3.	5.	4.
(5).	4.	1.	3.	5.
(6).	7.	2.	6.	7.
(7).	2.	6.	7.	2.

TAVOLA 39.ª L A 40.ª

A

O.	I.	II.	III.	IV.	O.	I.
(1).	*	*	*	1.	(1).	*
(2).	*	*	*		(2).	*
(3).	*	*	*	3.	(3).	*
(4).	*	*	*	4.	(4).	*
(5).	*	*	*	5.	(5).	*
(6).	*	*	*		(6).	*
(7).	*	*	*		(7).	*

b.
c.
d.
f.
g.

C

O.	I.	II.	III.
(1).	*	*	*
(2).	*	*	*
(3).	*	*	*
(4).	*	*	*
(5).	*	*	*
(6).	*	*	*
(7).	*	*	*

(*f*). (*d*). (*c*). (*b*). (*a*).
(*g*). (*f*). (*d*). (*c*). (*b*).
(*h*). (*g*). (*f*). (*d*). (*c*).
(*a*). (*h*). (*g*). (*f*). (*d*).
(*b*). (*a*). (*h*). (*g*). (*f*).
(*c*). (*b*). (*a*). (*h*). (*g*).
(*d*). (*c*). (*b*). (*a*). (*h*).

TAVOLA 38.ª

A				B			
O.	I.	II.	III.	O.	I.	II.	III.
(1).	*	*	4.	(1).	*	*	
(2).	*	*		(2).	*	*	2.
(3).	*	*	1.	(3).	*	*	
(4).	*	*	5.	(4).	*	*	
(5).	*	*	3.	(5).	*	*	
(6).	*	*		(6).	*	*	6.
(7).	*	*		(7).	*	*	7.

C

O.	I.	II.	III.
(1).	*	*	4.
(2).	*	*	2.
(3).	*	*	1.
(4).	*	*	5.
(5).	*	*	3.
(6).	*	*	6.
(7).	*	*	7.

TAVOLA 39.ª

A					B				
O.	I.	II.	III.	IV.	O.	I.	II.	III.	IV.
(1).	*	*	*	1.	(1).	*	*	*	
(2)-	*	*	*		(2).	*	*	*	6
(3).	*	*	*	3.	(3).	*	*	*	
(4).	*	*	*	4.	(4).	*	*	*	
(5).	*	*	*	5.	(5).	*	*	*	
(6).	*	*	*		(6).	*.	*	*	7
(7).	*	*	*		(7).	*	*	*	2

C

O.	I.	II.	III.	IV.
(1).	*	*	*	1.
(2).	*	*	*	6.
(3).	*	*	*	3.
(4):	*	*	*	4.
(5).	*	*	*	5.
(6).	*	*	*	7.
(7).	*	*	*	2.

TAVOLA 40.ª

A

O.	I.
(a)	b.
(b)	c.
(c)	d.
(d)	f.
(f)	g.
(g)	h.
(h)	a.

B

Giro della cosa: a, b, c, d, f, g, h — pei posti:

(h).	(g).	(f).	(d).	(c).	(b).	(a).
(a).	(h).	(g).	(f).	(d).	(c).	(b).
(b).	(a).	(h).	(g).	(f).	(d).	(c).
(c).	(b).	(a).	(h).	(g).	(f).	(d).
(d).	(c).	(b).	(a).	(h).	(g).	(f).
(f).	(d).	(c).	(b).	(a).	(h).	(g).
(g).	(f).	(d).	(c).	(b).	(a).	(h).

TAVOLA 42.[a] 43.[a]

A

O.	I.	O.	I.	O.	I.
(1)	21.	(11).	26.	(21).	31.
(2)	20.	(12).	15.	(22).	10.
(3)	22.	(13).	27.	(23).	32.
(4)	19.	(14).	14.	(24).	9.
(5)	23.	(15).	28.	(25).	33.
(6)	18.	(16).	13.	(26).	8.
(7)	24.	(17).	29.	(27).	34.
(8)	17.	(18).	12.	(28).	7.
(9)	25.	(19).	30.	(29).	35.
(10)	16.	(20).	11.	(30).	6.

O.	I.	O.	I.
21)	19.	(31)	27.
22)	20.	(32)	29.
23)	16.	(33)	31.
24)	17.	(34)	33.
25)	21.	(35)	32.
26)	22.	(36)	30.
27)	23.	(37)	28.
28)	24.	(38)	36.
29)	26.	(39)	37.
30)	25.	(40)	38.

B

giro della cosa 1 pei 27 posti
(40). (39). (37). (33). (25). (9). (
(15). (12). (18). (6). (30). (19). ( ). (28). (37). (39). (11).
(13). (16). (10). (22). (3). (36). (

C

giro della cosa 2 pei 9 posti
(38). (35). (29). (17). (8). (26). (4). (16). (23). (27).
4). (2).

D

giro della cosa 5 pei 3 posti
(32). (23). (5). . (19). (21). (25).
. (40). (3).

E

giro della cosa 14 al posto
(14). . (15). (18). (20).
. (32). (35). (4).

F

Incontro secondo la regola del § 36. la regola

Somma dei posti

$27 + 9 + 3 + 1 = 40.$

$+ 11 + 12 = 40.$

TAVOLA 41.[a]

O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
(1)	3.	5.	4.	1.	3.	5.	4.	1.	3.	5.	4.	1.
(2)	6.	7.	2.	6.	7.	2.	6.	7.	2.	6.	7.	2.
(3)	5.	4.	1.	3.	5.	4.	1.	3.	5.	4.	1.	3.
(4)	1.	3.	5.	4.	1.	3.	5.	4.	1.	3.	5.	4.
(5)	4.	1.	3.	5.	4.	1.	3.	5.	4.	1.	3.	5.
(6)	7.	2.	6.	7.	2.	6.	7.	2.	6.	7.	2.	6.
(7)	2.	6.	7.	2.	6.	7.	2.	6.	7.	2.	6.	7.

TAVOLA 42.[a]

A

O.	I.	O.	I.	O.	I.	O.	I.
(1)	21.	(11).	26.	(21).	31.	(31)	36.
(2)	20.	(12).	15.	(22).	10.	(32)	5.
(3)	22.	(13).	27.	(23).	32	(33)	37.
(4)	19.	(14).	14.	(24).	9.	(34)	4.
(5)	23.	(15).	28.	(25).	33.	(35)	38.
(6)	18.	(16).	13.	(26).	8.	(36)	3.
(7)	24.	(17).	29.	(27).	34.	(37)	39.
(8)	17.	(18).	12.	(28).	7.	(38)	2.
(9)	25.	(19).	30.	(29).	35.	(39)	40.
(10)	16.	(20).	11.	(30).	6.	(40)	1.

B

giro della cosa 1 pei 27 posti (40). (39). (37). (33). (25). (9). (24). (7). (28). (15). (12). (18). (6). (30). (19). (4). (34). (21). (13). (16). (10). (22). (3). (36). (31). (21). (1).

C

giro della cosa 2 pei 9 posti (38). (35). (29). (17). (8). (26). (11). (20). (2).

D

giro della cosa 5 pei 3 posti (32). (23). (5).

E

giro della cosa 14 al posto (14).

F

Incontro secondo la regola del § 36.

Somma dei posti

$27 + 9 + 3 + 1 = 40.$

TAVOLA 43.[a]

A

O.	I.	O.	I.	O.	I.	O.	I.
(1).	39.	(11).	9.	(21)	19.	(31)	27.
(2).	34.	(12).	6.	(22)	20.	(32)	29.
(3).	40.	(13).	1.	(23)	16.	(33)	31.
(4).	35.	(14).	10.	(24)	17.	(34)	33.
(5).	3.	(15).	11.	(25)	21.	(35)	32.
(6).	5.	(16).	4.	(26)	22.	(36)	30.
(7).	4.	(17).	13.	(27)	23.	(37)	28.
(8).	2.	(18).	15.	(28)	24.	(38)	36.
(9).	7.	(19).	12.	(29)	26.	(39)	37.
(10).	8.	(20).	18.	(30)	25.	(40)	38.

B

giro della cosa 1 pei 7 posti (13). (17). (24). (28). (37). (39). (11).

C

giro della cosa 2 pei 10 posti (8). (10). (14). (16). (23). (27). (31). (33). (34). (2).

D

giro della cosa 3 pei 11 posti (5). (6). (12). (19). (21). (25). (30). (36). (38). (40). (3).

E

giro della cosa 4 pei 12 posti (7). (9). (11). (15). (18). (20). (22). (26). (29). (32). (35). (4).

F

Incontro secondo la regola del §. 36.

somma dei posti $7 + 10 + 11 + 12 = 40.$

TAVOLA 45.[a]

A

O.	I.′	O.	I.″	O.	I.‴.
(1).	4.	(1).	2.	(1).	3.
(2).	3.	(2).	5.	(2).	6.
(3).	5.	(3).	1.	(3).	4.
(4).	1.	(4).	3.	(4).	5.
(5).	6.	(5).	6.	(5).	2.
(6).	2.	(6).	4.	(6).	1.

B

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	X
4.	3.	5.	4.	2.	5.	6.	2.	1.	6.	3.	1
3.	6.	4.	1.	5.	3.	2.	4.	6.	5.	1.	2
5.	4.	2.	5.	6.	2.	1.	6.	3.	1.	4.	3
1.	5.	3.	2.	4.	6.	5.	1.	2.	3.	6.	4.
6.	2.	1.	6.	3.	1.	4.	3.	5.	4.	2.	5.
2.	1.	6.	3.	1.	4.	3.	5.	4.	2.	5.	6.

C

O.	II.	IV.	VI.	VIII.	X.	XII.
(1)	3.	4.	5.	2.	6.	1.
(2)	6.	1.	3.	4.	5.	2.
(3)	4.	5.	2.	6.	1.	3.
(4)	5.	2.	6.	1.	3.	4.
(5)	2.	6.	1.	3.	4.	5.
(6)	1.	3.	4.	5.	2.	6.

6.[a]

C

II.	O.	II.
.	(1).	4.
.	(2).	3.
.	(3).	5.
.	(4).	1.
.	(5).	2.
5.	(6).	6.

). (1).

). (3). (2).

).

TAVOLA 44.ª

A

O. 4385.	O. 4385.	O. 4385.	O. 4385.
* (1). 28.	**** (11). 4	*** (21). 38.	** (31) 10.
** (2). 23.	*** (12). 30	**** (22). 15.	**** (32) 22.
*** (3). 19.	* (13). 37.	** (23). 2.	** (33) 14.
**** (4). 29.	** (14). 33.	* (24). 1.	** (34) 16.
*** (5). 21.	**** (15). 7.	*** (25). 40.	**** (35) 26.
*** (6). 25.	** (16). 34.	**** (26). 18.	*** (36) 5.
**** (7). 32.	* (17). 39.	** (27). 8.	* (37) 17.
** (8). 27.	**** (18). 9.	* (28). 13.	*** (38) 6.
**** (9). 35.	*** (19). 36.	**** (29). 20.	* (39) 24.
** (10) 31.	**** (20). 11.	*** (30). 3.	*** (40) 12.

B

Giro della cosa 1 pei 7 posti { (13). (17). (24). (28). (37). (39). (1).

C

Giro della cosa 2 pei 10 posti { (8). (10). (14). (16). (23). (27). (31). (33). (34). (2).

D

Giro della cosa 3 pei 11 posti { (5). (6). (12). (19). (21). (25). (30). (36). (38). (40). (3).

E

Giro della cosa 4 pei 12 posti { (7). (9). (11). (15). (18). (20). (22). (26). (29). (32). (35). (4).

TAVOLA 45.ª

A

O.	I.′	O.	I.″	O.	I.‴.
(1).	4.	(1).	2.	(1).	3.
(2).	3.	(2).	5.	(2).	6.
(3).	5.	(3).	1.	(3).	4.
(4).	1.	(4).	3.	(4).	5.
(5).	6.	(5).	6.	(5).	2.
(6).	2.	(6).	4.	(6).	1.

B

O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
(1).	4.	3.	5.	4.	2.	5.	6.	2.	1.	6.	3.	1.
(2).	3.	6.	4.	1.	5.	3.	2.	4.	6.	5.	1.	2.
(3).	5.	4.	2.	5.	6.	2.	1.	6.	3.	1.	4.	3.
(4).	1.	5.	3.	2.	4.	6.	5.	1.	2.	3.	6.	4.
(5).	6.	2.	1.	6.	3.	1.	4.	3.	5.	4.	2.	5.
(6).	2.	1.	6.	3.	1.	4.	3.	5.	4.	2.	5.	6.

C

O.	II.	IV.	VI.	VIII.	X.	XII.
(1)	3.	4.	5.	2.	6.	1.
(2)	6.	1.	3.	4.	5.	2.
(3)	4.	5.	2.	6.	1.	3.
(4)	5.	2.	6.	1.	3.	4.
(5)	2.	6.	1.	3.	4.	5.
(6)	1.	3.	4.	5.	2.	6.

TAVOLA 46.ª

A				B			C	
O.	I′.	O.	I″.	O.	I.	II.	O.	II.
(1)	3.	(1).	2.	(1).	3.	4.	(1).	4.
(2)	4.	(2).	1.	(2).	4.	3.	(2).	3.
(3)	6.	(3).	4.	(3).	6.	5.	(3).	5.
(4)	5.	(4).	6.	(4).	5.	1.	(4).	1.
(5)	2.	(5).	5.	(5).	2.	2.	(5).	2.
(6)	1.	(6).	3.	(6).	1.	6.	(6).	6.

D

Giro della cosa { 1. 2. 6. } pei posti { (4). (1). — (5). (3). (2). — (6).

TAVOLA 48.ª

B

I'.	O.	I''.	O.	I.	II.	III.
2.	(1).	5.	(1).	2.	6.	1.
.	(2).	6.	(2).	3.	1.	5.
4.	(3).	4.	(3).	4.	5.	3.
.	(4).	2.	(4).	5.	3.	4.
.	(5).	3.	(5).	6.	4.	2.
.	(6).	1.	(6).	1.	2.	6.

D

V.	VI.	O.	I.	III.	V.
		p	*c*		
2.	1.	(1).	2.	1.	6.
.	2.	(2).	3.	5.	4.
.	3.	(3).	4.	3.	5.
.	4.	(4).	5.	4.	3.
.	5.	(5).	6.	2.	1.
.	6.	(6).	1.	6.	2.

E

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
(1).	2.	6.	1.	2.	6.	1.
(2).	3.	1.	5.	6.	4.	2.
(3).	4.	5.	3.	4.	5.	3.

O.	I'v.
(1).	5.
(2).	4.
(3).	6.
(4).	3.
(5).	2.
(6).	1.

VI.	VII.
6.	5.
2.	1.
5.	3.
1.	4.
3.	6.
4.	2.

F

O.	III.	VII.
p	*c*	
(1).	2.	5.
(2).	4	1.
(3).	1.	3.
(4).	5.	4.
(5).	3.	6.
(6).	6.	2.

H

X.	XIII.	XVII.	XXI.
4.	1.	3.	6.
2.	5.	4.	1.
3.	6.	2.	5.
1.	3.	6.	2.
5.	4.	1.	3.
.	4.	1.	3.

TAVOLA 47.ª

A

O.	I'.	O.	I''.	O.	I'''.
(1).	4.	(1).	2.	(1).	2.
(2).	3.	(2).	5.	(2).	3.
(3).	5.	(3).	1.	(3).	4.
(4).	1.	(4).	3.	(4).	5.
(5).	6.	(5).	6.	(5).	6.
(6).	2.	(6).	4.	(6).	1.

B

O.	I.	II.	III.
(1).	4.	3.	6.
(2).	3.	6.	4.
(3).	5.	4.	5.
(4).	1.	5.	2.
(5).	6.	2.	1.
(6).	2.	1.	3.

C

O.	III.
(1).	6.
(2).	4.
(3).	5.
(4).	2.
(5).	1.
(6).	3.

D

Giro della cosa		pei posti	
	1.		(5). (3). (6). 1.
	2.		(4). (2).

TAVOLA 48.ª

A / **B**

O.	I'.	O.	I''.	O.	I.	II.	III.
(1).	2.	(1).	5.	(1).	2.	6.	1.
(2).	3.	(2).	6.	(2).	3.	1.	5.
(3).	4.	(3).	4.	(3).	4.	5.	3.
(4).	5.	(4).	2.	(4).	5.	3.	4.
(5).	6.	(5).	3.	(5).	6.	4.	2.
(6).	1.	(6).	1.	(6).	1.	2.	6.

C

O.	II.	IV.	VI.
(1).	6.	2.	1.
(2).	1.	6.	2.
(3).	5.	4.	3.
(4).	3.	5.	4.
(5).	4.	3.	5.
(6).	2.	1.	6.

D

O.	I.	III.	V.
	p	*c*	
(1).	2.	1.	6.
(2).	3.	5.	4.
(3).	4.	3.	5.
(4).	5.	4.	3.
(5).	6.	2.	1.
(6).	1.	6.	2.

E

O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
(1).	2.	6.	1.	2.	6.	1.
(2).	3.	1.	5.	6.	4.	2.
(3).	4.	5.	3.	4.	5.	3.
(4).	5.	3.	4.	5.	3.	4.
(5).	6.	4.	2.	3.	1.	5.
(6).	1.	2.	6.	1.	2.	6.

TAVOLA 49.ª

A

O.	I'	O.	I''.	O.	I'''.	O.	I^{v}.
(1).	2.	(1).	2.	(1).	3.	(1).	5.
(2).	3.	(2).	5.	(2).	4.	(2).	4.
(3).	4.	(3).	1.	(3).	5.	(3).	6.
(4).	5.	(4).	3.	(4).	6.	(4).	3.
(5).	6.	(5).	6.	(5).	1.	(5).	2.
(6).	1.	(6).	4.	(6).	2.	(6).	1.

B

O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
(1).	2.	3.	2.	3.	5.	6.	5.
(2).	3.	6.	4.	5.	6.	2.	1.
(3).	4.	2.	1.	6.	1.	5.	3.
(4).	5.	4.	5.	1.	4.	1.	4.
(5).	6.	1.	3.	4.	2.	3.	6.
(6).	1.	5.	6.	2.	3.	4.	2.

C		D			E			F		
O.	IV.	O.	I.	V.	O.	II.	VI.	O.	III.	VII.
			p	*c*		*p*	*c*		*p*	*c*
(1).	3.	(1).	2.	5.	(1).	3.	6.	(1).	2.	5.
(2).	5.	(2).	3.	6.	(2).	6.	2.	(2).	4	1.
(3).	6.	(3).	4.	1.	(3).	2.	5.	(3).	1.	3.
(4).	1.	(4).	5.	4.	(4).	4.	1.	(4).	5.	4.
(5).	4.	(5).	6.	2.	(5).	1.	3.	(5).	3.	6.
(6).	2.	(6).	1.	3.	(6).	5.	4.	(6).	6.	2.

G

O.	IV.	VIII.	XII.	XVI.	XX.	XXIV.
(1).	3.	6.	2.	5.	4.	1.
(2).	5.	4.	1.	3.	6.	2.
(3).	6.	2.	5.	4.	1.	3.
(4).	1.	3.	6.	2.	5.	4.
(5).	4.	1.	3.	6.	2.	5.
(6).	2.	5.	4.	1.	3.	6.

H

O.	I.	V.	IX.	XIII.	XVII.	XXI.
	p	*c*				
(1).	2.	5.	4.	1.	3.	6.
(2).	3.	6.	2.	5.	4.	1.
(3).	4.	1.	3.	6·	2.	5.
(4).	5.	4.	1.	3.	6.	2.
(5).	6.	2.	5.	4.	1.	3.
(6).	1.	3.	6.	2.	5.	4.

L

O.	II.	VI.	X.	XIV.	XVIII	XXII.
p	*c*					
(1).	3.	6.	2.	5.	4.	1.
(2).	6.	2.	5.	4.	1.	3.
(3).	2.	5.	4.	1.	3.	6.
(4).	4.	1.	3.	6.	2.	5.
(5).	1.	3.	6.	2.	5.	4.
(6).	5.	4.	1.	3.	6.	2.

M

O.	III.	VII.	XI.	XV.	XIX.	XXIII
p	*c*					
(1).	2.	5.	4.	1.	3.	6.
(2).	4.	1.	3.	6.	2.	5.
(3).	1.	3.	6.	2.	5.	4.
(4).	5.	4.	1.	3.	6.	2.
(5).	3.	6.	2.	5.	4.	1.
(6).	6.	2.	5.	4.	1.	3.

TAVOLA 50.ª

A

O.	I.′	O.	I.″	O.	I.‴	O.	I.′ᵛ
(1).	2.	(1).	2.	(1).	3.	(1).	5.
(2).	3.	(2).	5.	(2).	4.	(2).	4.
(3).	4.	(3).	1.	(3).	5.	(3).	6.
(4).	5.	(4).	3.	(4).	6.	(4).	3.
(5).	6.	(5).	6.	(5).	1.	(5).	2.
(6).	1.	(6).	4.	(6).	2.	(6).	1.

B

O.	I.	II.	III.	IV.
(1).	2.	3.	2.	3.
(2).	3.	6.	4.	5.
(3).	4.	2.	1.	6.
(4).	5.	4.	5.	1.
(5).	6.	1.	3.	4.
(6).	1.	5.	6.	2.

C

O.	IV.
(1).	3.
(2).	5.
(3).	6.
(4).	1.
(5).	4.
(6).	2.

E Legge O. I′

Giro della cosa 1. pei posti (6). (5). (4) (3). (2). (1)

D F Legge O I″

Giro della cosa 1 pei posti (3). (4). (6). (5). (2). (1).

G Legge O. I‴

Giro della cosa 1 2 pei posti (5). (3). (11). (6). (4). (2)

H Legge O. I′ᵛ

Giro della cosa 1 pei posti (6). (3). (4). (2). (5). (1).

L

Giro cercato della 1.

1°
(6). (5). (3). (4).

2°
(3). (4). (2). (5).

3°
(4). (6). (4). (2).

4°
(1). (3). (1). (6).

5°
(5). (2). (6). (3).

6°
(2). (1). (5). (3).

TAVOLA 51.ª

L Giro della 1.

1.°
(6). (5). (3). (4)

2.°
(3). (4). (2). (5).

3.°
(4). (5). (4). (2)

4.°
(1). (3). (1). (6)

5.°
(5). (2). (6). (3).

6.°
(2). (1). (5). (1)

M Giro della 2.

(1). (3). (1). (6). (5). (2). (6). (3). (2). (1). (5). (1)

(6). (5). (3). (4). (3). (4). (2). (5). (4). (6). (4). (2)

N Giro della 4.

(3). (4). (2). (5) (4). (6). (4). (2). (1). (3). (1). (6).

(5). (2). (6). (3) (2). (1). (5). (1). (6). (5). (3). (4).

TAVOLA 52.ª

A

O.	I.′	O.	I.″	O.	I.‴	O.	I.′ᵛ
(1).	2.	(1).	2.	(1).	3.	(1).	5.
(2).	3.	(2).	5.	(2).	4.	(2).	4.
(3).	4.	(3).	1.	(3).	5.	(3).	6.
(4).	5.	(4).	3.	(4).	6.	(4).	3.
(5).	6.	(5).	6.	(5).	1.	(5).	2.
(6).	1.	(6).	4.	(6).	2.	(6).	1.

B

O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
(1).	2.	3.	2.	3.	5.	6.	5.
(2).	3.	6.	4.	5.	6.	2.	1.
(3).	4.	2.	1.	6.	1.	5.	3.
(4).	5.	4.	5.	1.	4.	1.	4.
(5).	6.	1.	3.	4.	2.	3.	6.
(6).	1.	5.	6.	2.	3.	4.	2.

C

D O. IV.		E O. I. V.			F O. II. VI.			G O. III. VII.		
			p	*c*		*p*	*c*		*p*	*c*
(1).	3.	(1).	2.	5.	(1).	3.	6.	(1).	2.	5.
(2).	5.	(2).	3.	6.	(2).	6.	2.	(2).	4.	1.
(3).	6.	(3).	4.	1.	(3).	2.	5.	(3).	1.	3.
(4).	1.	(4).	5.	4.	(4).	4.	1.	(4).	5.	4.
(5).	4.	(5).	6.	2.	(5).	1.	3.	(5).	3.	6.
(6).	2.	(6).	1.	3.	(6).	5.	4.	(6).	0.	2.

H. Legge O. IV.

Giro della cosa 1 pei posti (4). (5). (2). (6). (3. (1).

L. Legge O. I. V.

Giro della cosa 1 pei posti (3)4. (4)5. (1)2. (5)6. (2)3. (6)1.

M. Legge O. II. VI.

Giro della cosa 1 pei posti (4)4. (6)5. (3)2. (2)6. (1)3. (5)1.

N. Legge O. III. VII.

Giro della cosa 1 pei posti (2)4. (4)5. (1)2. (6)6. (5)3. (3)1.

segue

TAVOLA 53.ª ª.

A

O.	I.′	O.	I.″	O.	I.‴
(1).	2.	(1).	2.	(1).	3.
(2).	3.	(2).	5.	(2).	4.
(3).	4.	(3).	1.	(3).	5.
(4).	5.	(4).	3.	(4).	6.
(5).	6.	(5).	6.	(5).	1.
(6).	1.	(6).	4.	(6).	2.

B

O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
(1).	2.	3.	2.	3.	5.	
(2).	3.	6.	4.	5.	6.	
(3).	4.	2.	1.	6.	1.	
(4).	5.	4.	5.	1.	4.	
(5).	6.	1.	3.	4.	2.	
(6).	1.	5.	6.	2.	3.	

C

D		E			F		
O. IV.		O. I. V.			O. II. VI.		
			p	*c*		*p*	*c*
(1).	3.	(1).	2.	5.	(1).	3.	6.
(2).	5.	(2).	3.	6.	(2).	6.	2.
(3).	6.	(3).	4.	1.	(3).	2.	5.
(4).	1.	(4).	5.	4.	(4).	4.	1.
(5).	4.	(5).	6.	2.	(5).	1.	3.
(6).	2.	(6).	1.	3.	(6).	5.	4.

H. Legge O. IV.

Giro della cosa } 1 pei posti } (4). (5). (2). (6). (3). (1

L. Legge O. I. V.

Giro della cosa } 1 pei posti } (3)4. (4)5. (1)2. (5)6. (

M. Legge O. II. VI.

Giro della cosa } 1 pei posti } (4)4. (6)5. (3)2. (2)6.

N. Legge O. III. V

Giro della cosa } 1 pei posti } (2)4. (4)5. (1)2. (6)6. (

Segue la Tav. 52.ª

P

File corrispondenti al posto 4.

Q. secondo il giro H.	R. secondo il giro L.
1, 3, 6, 2, 5, 4,	4, 1, 3. 6, 2, 5,
S. secondo il giro M.	**T. secondo il giro N.**
1, 3, 6, 2, 5, 4.	4, 1, 3, 6, 2, 5.

V

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X,	XI.	XII.
5.	4.	5.	1.	4.	1.	4.	3.	1.	3.	1.	6.

XIII.	XIV.	XV.	XVI.	XVII.	XVIII.	XIX.	XX.	XXI.	XXII.	XXIII.	XXIV.
3.	6.	3.	2.	6.	2.	6.	5.	2.	5.	2.	4.

TAVOLA 53.ª

A

O.	I.′	O.	I.″	O.	I.‴	O.	I.ᴵᵛ
(1).	2.	(1).	2.	(1).	3.	(1).	5.
(2).	3.	(2).	5.	(2).	4.	(2).	4.
(3).	4.	(3).	1.	(3).	5.	(3).	6.
(4).	5.	(4).	3.	(4).	6.	(4).	3.
(5).	6.	(5).	6.	(5).	1.	(5).	2.
(6).	1.	(6).	4.	(6).	2.	(6).	1.

B

O.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
(1).	2.	3.	2.	3.	5.	6.	5.
(2).	3.	6.	4.	5.	6.	2.	1.
(3).	4.	2.	1.	6.	1.	5.	3.
(4).	5.	4.	5.	1.	4.	1.	4.
(5).	6.	1.	3.	4.	2.	3.	6.
(6).	1.	5.	6.	2.	3.	4.	2.

C

D		E			F			G		
O. IV.		O. I. V.			O. II. VI.			O. III. VII.		
			p	*c*		*p*	*c*		*p*	*c*
(1).	3.	(1).	2.	5.	(1).	3.	6.	(1).	2.	5.
(2).	5.	(2).	3.	6.	(2).	6.	2.	(2).	4.	1.
(3).	6.	(3).	4.	1.	(3).	2.	5.	(3).	1.	3.
(4).	1.	(4).	5.	4.	(4).	4.	1.	(4).	5.	4.
(5).	4.	(5).	6.	2.	(5).	1.	3.	(5).	3.	6.
(6).	2.	(6).	1.	3.	(6).	5.	4.	(6).	6.	2.

H. Legge O. IV.

Giro della cosa } 1   pei posti } (4). (5). (2). (6). (3). (1).

L. Legge O. I. V.

Giro della cosa } 1   pei posti } (3)4. (4)5. (1)2. (5)6. (2)3. (1)6.

M. Legge O. II. VI.

Giro della cosa } 1   pei posti } (4)4. (6)5. (3)2. (2)6. (1)3. (5)1.

N. Legge O. III. VII.

Giro della cosa } 1   pei posti } (2)4. (4)5. (1)2. (6)6. (5)3. (3)1.

Segue la Tav. 53.ª

V.

XI.ª

2.

5.

4.

3.

6.

1.

SUL NUOVO TORNO IMMAGINATO DAL SIGNOR CARLO PAREA

Ispettore Generale e Direttore dei Lavori del Canale di Pavia

MEMORIA

DI ANTONIO BORDONI

già Professore nella Scuola Militare di Pavia

Ricevuta il dì 16. *Marzo* 1817.

I.

S'immaginino due cilindri i quali abbiano gli assi paralleli e ad uno di essi unito perpendicolarmente un manubrio, che prolungato passi per l' asse del cilindro medesimo; ed alla estremità di questo manubrio più lontana dal cilindro stesso si supponga legata una fune, la quale in parte sia tesa nello spazio ed in parte avvolta all' altro cilindro, a cui trovisi fissato l' altro capo di essa.

Supposto che i due cilindri possano rotare intorno ai rispettivi assi, facendo rotare il secondo pel verso onde ad esso si avvolga maggiormente la fune, si obbligherà evidentemente a rotare anche il primo cioè quello fornito del manubrio. Ora mentre accade questa rotazione, l' angolo compreso dal manubrio e dalla fune unita ad esso aumenta continuamente sino al punto di risultare eguale a due retti; dimodochè, se quest' angolo nel principio è maggiore di un retto, si mantiene sempre ottuso, e se è acuto in un istante solo eguaglia un retto. Per tanto, in qualunque istante del tempo in

cui dura la rotazione, eccettuato l'unico anzidetto, la forza prodotta dalla tensione della fune legata al manubrio sarà decomponibile in due, l' una perpendicolare al manubrio e l' altra diretta a seconda del medesimo.

Il moto di rotazione del secondo cilindro, cioè quel moto che si desidera produrre coll' ordigno immaginato, è prodotto interamente dalla prima di queste due componenti; giacchè l' altra, passando per l' asse del primo cilindro, esercita su di esso la semplice pressione, la quale aumenta la difficoltà che è d' uopo vincere per produrre questo movimento, e nel medesimo tempo tende a rompere l' ordigno stesso.

Ora alla superficie cilindrica ordinaria a cui si avvolge la fune si supponga sostituita una superficie cilindrica qualunque, la quale abbia però la retta generatrice e quella intorno alla quale essa rota, parallela all' asse del cilindro fornito del manubrio: egli è facile a concepirsi che la legge, secondo la quale varierà l' angolo compreso dalla fune e dal manubrio mentre succede la rotazione, cambierà col variare la superficie medesima.

Il Signor Ispettore suddetto mi propose il quesito: trovare quella superficie cilindrica alla quale debba avvolgersi la fune, perchè si mantenga essa per tutto il tempo della rotazione perpendicolare al manubrio a cui è legata, vale a dire, affinchè la tensione o forza prodotta da essa sia tutta impiegata utilmente a produrre la rotazione desiderata.

In questa breve Memoria io espongo le equazioni della linea esprimente la curvatura della superficie dimandata, cioè le equazioni della intersezione fatta alla superficie stessa da un piano perpendicolare alla sua retta generatrice, ed alcune altre singolari proprietà della linea medesima. L' utilità della quistione, il metodo che uso per trattarla, e le singolarità analitiche che s' incontrano nello sviluppo di essa, mi lusingano che questo tenue lavoro potrà essere aggradito dai lettori.

2.

Sia A (Fig. 1) il punto dove il piano del manubrio e della fune sega la retta attorno cui rota la superficie cilindrica dimandata, ed L quello ove è segato dal medesimo piano l' asse del cilindro a cui è annestato il manubrio.

Così, ad un dato istante del tempo in cui dura la rotazione, la sezione fatta dal medesimo piano alla superficie dimandata sia espressa dalla curva CDE, il manubrio dalla retta IL, e la fune dalla linea IDE composta della parte rettilinea ID toccante la curva CDE in D, e della parte curvilinea DE avvolta alla curva medesima CDE.

La conoscenza della curva CDE la quale esprime la curvatura della superficie dimandata, forma lo scopo principale che si ha di mira nella presente indagine.

Continuando la rotazione della superficie cilindrica a cui si avvolge la fune, ossia rotando la linea CDE da C verso E intorno al punto A, la linea medesima CDE passi alla posizione FGE, il manubrio alla HL, e la fune alla HGE: per le proprietà della curva dimandata gli angoli DIL, GHL debbono essere retti, le rette ID, HG toccanti le linee CDE, FGE, e le lunghezze ID+DS, HG+GE eguali fra loro, cioè eguali tutte a quella della fune.

Le linee LH, HG, FGE unite invariabilmente rotino attorno al punto A in modo, che la FGE ritorni sulla CDE; ed in questa posizione la retta GH cada nella MP toccante la linea CDE, e la HL nella MN: il punto N termine della MN sarà evidentemente nella periferia circolare QNL avente il centro in A ed il raggio eguale alla distanza di A da L.

Essendo MP = HG, sarà MPDE = ID + DE, ossia MP + PD = ID; e però i punti M, I apparterranno ad una medesima evolvente della linea CDE. Similmente per essere retti gli angoli NMP, LID, le linee rette MN, IL, le quali hanno

i termini N, L nella medesima periferia circolare QNL, cadono nelle toccanti la evolvente anzidetta nei punti M ed I.

Adunque la curvatura o linea dimandata ha una evolvente, di cui sono costanti ed eguali alla lunghezza del manubrio quelle porzioni delle sue toccanti, le quali sono intercette fra i punti di contatto e la periferia circolare avente il raggio eguale alla distanza degli assi di rotazione delle due superficie cilindriche, ed il centro nel punto attorno cui deve rotare la medesima curva dimandata.

Questa proprietà della linea dimandata è quella sulla quale mi appoggierò per determinare la sua equazione.

3.

La linea TMS (Fig. 2) esprima la evolvente suddetta della linea dimandata, ed AP, PM esprimano le coordinate del suo punto M riferito agli assi Ax, Ay rettangolari e condotti pel punto A intorno al quale rota la linea dimandata; la retta MN porzione della toccante in M la linea TMS sia eguale al manubrio; e sarà N un punto della periferia QNL avente il centro in A ed il raggio eguale alla distanza dei due assi di rotazione delle due superficie cilindriche.

Si conducano NR perpendicolari ed MV parallela alla Ax; e pongasi

$AN = R$, $MN = r$, $R^2 - r^2 = n^2$, $AP = x$, $PM = y$, $TM = s$, e

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = y', \quad \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = y'', \quad \left(\frac{ds}{dx}\right) = s', \text{ ec.}$$

La sola ispezione della figura dà

$AR = AP + MV$, ed $RN = PM + VN$; e però si avrà

$AR = x + \frac{r}{s'}$, ed $RN = y + \frac{ry'}{s'}$.

Ma debb' essere

$$\overline{AR}^2 + \overline{RN}^2 = \overline{AN}^2 \text{ ossia eguale ad } R^2;$$

adunque l'equazione della evolvente in quistione sarà

$$\left(x + \frac{r}{s'}\right)^2 + \left(y + \frac{ry'}{s'}\right)^2 = R^2, \text{ ovvero}$$

$$x^2 + y^2 + 2r \frac{x+yy'}{s'} = n^2,$$

per essere $\frac{r^2}{s'^2} + \frac{r^2 y'^2}{s'^2} = r^2$.

L' equazione quì trovata o la sua equivalente

$$s' = - r \frac{2x+2yy'}{x^2+y^2-n^2}$$

somministra immediatamente

$$s = a - r \log. \pm (x^2 + y^2 - n^2),$$

cioè l' arco espresso per le coordinate: a rappresenta l' arbitraria introdotta dalla integrazione eseguita.

4.

Ponendo $y = \phi \cos.\omega$, ed $x = \phi \operatorname{sen}.\omega$, cioè prendendo per coordinate della curva il raggio vettore $AM = \phi$, e l' angolo $yAM = \omega$, compreso da esso raggio e dall' asse Ay, si ha

$$x^2 + y^2 = \phi^2,\ x + yy' = \phi\phi',\ \text{ed}$$

$$s' = \sqrt{[(\phi' \operatorname{sen}.\omega + \phi\omega' \cos.\omega)^2 + (\phi' \cos.\omega - \phi\omega' \operatorname{sen}.\omega)^2]} = \sqrt{(\phi'^2 + \phi^2\omega'^2)}$$

per essere $\phi'\cos.\omega - \phi\omega'\operatorname{sen}.\omega = y'$, e $\phi'\operatorname{sen}.\omega + \phi\omega'\cos.\omega = \left(\frac{dx}{dx}\right) = 1$: valori che riducono l'equazione differenziale del paragrafo antecedente alla

$$\phi^2 + 2r \frac{\phi\phi'}{\sqrt{(\phi'^2 + \phi^2\omega'^2)}} = n^2$$

ossia alla seguente

$$\pm \omega' = \frac{\phi' \sqrt{[2(R^2+r^2)\phi^2 - \phi^4 - n^4]}}{\phi(\phi^2 - n^2)}$$

nella quale le variabili sono separate.

Sostituendo in quest' ultima equazione $R^2 + r^2 + u$ in luogo di ϕ^2, e nella risultante ponendo $2Rr \cos.\mu$ invece della u, u e μ esprimendo due nuove variabili, si ottiene $\pm \omega$ eguale al trinomio

$$\frac{1}{2}\mu' - \frac{r}{R} \frac{\mu'}{\frac{r}{R} + \cos.\mu} - \frac{n^2}{4Rr} \cdot \frac{\mu'}{\frac{R^2+r^2}{2Rr} + \cos.\mu}$$

i cui termini sono facilmente integrabili colle regole a tutti note.

5.

Si ponga tang. $\frac{1}{2}\mu$ eguale ad una nuova variabile θ (*) (§ 154), e però

$$\cos.\mu = \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}, \text{ e } \mu' = \frac{2\theta'}{1+\theta^2};$$

e si avrà l' equazione

$$\pm\omega' = \frac{\theta'}{1+\theta^2} - n^2 \frac{\theta'}{(R+r)^2+(R-r)^2\theta^2} - 2r\frac{\theta'}{R+r-(R-r)\theta^2},$$

la quale ha ambedue i membri per sè stessi integrabili.

Quest' equazione integrata somministra, nel caso di $r = R$,

$$\pm\omega = \text{Arc. tang. } \theta - \theta + A,$$

nel caso di $r > R$

$$\pm\omega = \text{Arc. tang.} \frac{2r\theta}{R+r+(R-r)\theta^2} + \frac{2r}{n}\text{Arc. tang.} \theta\sqrt{\frac{r-R}{r+R}} + B,$$

ed in quello di $r < R$

$$\pm\omega = \text{Arc. tang.} \frac{2r\theta}{R+r+(R-r)\theta^2} - \frac{r}{n}\log.\frac{R+r+n\theta}{R+r-n\theta} + C, \text{ ovvero}$$

$$\pm\omega = \text{Arc. tang.} \frac{2r\theta}{R+r+(R-r)\theta^2} - \frac{r}{n}\log.\frac{n\theta+R+r}{n\theta-R-r} + C:$$

A, B, e C esprimono le arbitrarie introdotte dalle tre integrazioni eseguite.

Così le posizioni

$$\varphi^2 = R^2+r^2+u, \; 2Rr\cos.\mu = u, \text{ e tang.} \tfrac{1}{2}\mu = \theta, \text{ ovvero } \cos.\mu = \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}$$

fatte superiormente danno, pel primo caso

$$\varphi = 2r : \sqrt{(1+\theta^2)}, \text{ e per gli altri due}$$

$$\varphi = \sqrt{\left(R^2 + r^2 + 2Rr\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}\right)}.$$

(*) I paragrafi citati in questa maniera si riferiscono al compendio del Calcolo sublime del Cav. Brunacci.

Sostituendo questi valori delle φ ed ω nelle equazioni $y = \varphi \cos.\omega$, $x = \varphi \operatorname{sen}.\omega$, si avrebbero le coordinate rettangole x, y espresse colla θ; e ponendo questi valori delle x, y nelle notissime espressioni (§. 83) delle coordinate rettangole della evoluta formate colle quantità

$$x, y, \left(\frac{dy}{d\theta}\right), \left(\frac{dx}{d\theta}\right), \left(\frac{d^2y}{d\theta^2}\right), \left(\frac{d^2x}{d\theta^2}\right),$$

si otterrebbero queste ultime coordinate anch' esse espresse colla θ, e però anche l' equazione della medesima evoluta o curva dimandata mediante l' opportuna eliminazione della θ medesima.

Io non faccio queste successive sostituzioni, perchè esse danno dei risultamenti complicatissimi; e passo in vece ad altre considerazioni, le quali in modo veramente inaspettato somministrano un' equazione differenziale della linea dimandata facilmente integrabile.

6.

La curva dimandata si riferisca anch' essa agli assi Ax, Ay (Fig. 2); e siano t, ed u le sue coordinate rettangole corrispondenti alle x, y della sua evolvente considerata superiormente.

La teorica delle evolute delle linee piane da' (§. 85)

$$t = x - \frac{y's'^2}{y''}, \text{ ed } u = y + \frac{s'^2}{y''};$$

e però fra le coordinate della curva dimandata e le corrispondenti della suddetta sua evolvente sussisteranno le tre equazioni,

$$x^2 + y^2 + 2r\,\frac{x + yy'}{s'} = n^2,$$

$$t = x - \frac{y's'^2}{y''}, \quad u = y + \frac{s'^2}{y''},$$

Quindi eliminando da esse le variabili x, y non che le quantità y', y'', otterrassi un' equazione differenziale della curva richiesta.

La prima di queste tre equazioni somministra

$$x+yy'+r\left(\frac{1+y'^2+y'y''}{s'}-\frac{(x+yy')y'y''}{s'^3}\right)=0,$$

ossia $(x+yy'+rs')s'^3=r(xy'-y)y''$.

In questa e nella seconda si ponga in vece dell' y'' il suo valore $s'^2:(u-y)$ desunto dalla terza, e si otterranno le due

$$(x+yy'+rs')s'(u-y)=r(xy'-y),$$

$$t+uy'-x-yy'=0:$$

alle tre equazioni anzidette equivalgono le tre seguenti

$$x^2+y^2+2r\frac{x+yy'}{s'}=n^2,$$

$$(x+yy'+rs')s'(u-y)=r(xy'-y),$$

$$t+uy'=x+yy'.$$

Sostituendo nella prima e seconda di queste ultime equazioni in luogo della x il suo valore $t+uy'-yy'$ cavato dalla terza, si hanno le due

$$y^2+(t+uy'-yy')^2+2r\frac{t+uy'}{s'}=n^2, \text{ e}$$

$$(t+uy')s'(u-y)=r(ty'-u), \text{ ovvero } y=u+\frac{r}{s'}\left(\frac{u-ty'}{t+uy'}\right);$$

dalle quali eliminando la y, si ottiene

$$\left(u+\frac{r}{s'}\cdot\frac{u-ty'}{t+uy'}\right)^2+\left(t+\frac{ry'}{s'}\cdot\frac{ty'-u}{t+uy'}\right)^2+2r\frac{t+uy'}{s'}=n^2,$$

ossia

$$t^2+u^2+2rs'\left(\frac{t^2+u^2}{t+uy'}\right)+r^2\left(\frac{u+ty'}{t+uy'}\right)^2=n^2.$$

Ma dalla teorica delle evolute (§. 96) si ha $y'=-\frac{t'}{u'}$, e però

$$t+uy'=\frac{tu'-ut'}{u'},\quad u-ty'=\frac{uu'+tt'}{u'}, \text{ ed}$$

$$s'=\sqrt{(1+y'^2)}=\frac{1}{u'}\sqrt{(t'^2+u'^2)}.$$

Quindi ponendo nell' ultima equazione trovata in luogo di y', $t+uy'$, $u-ty'$, s', questi loro valori, essa si ridurrà, posto $\sqrt{(t'^2+u'^2)}=\varpi'$, alla seguente

$$t^2+u+2r\varpi'\left(\frac{t^2+u^2}{tu'-ut'}\right)+r^2\left(\frac{tt'+uu'}{tu'-ut'}\right)^2=n^2,$$

la quale, non contenendo le coordinate della evolvente, esprimerà un' equazione differenziale della curva dimandata.

7.

Per integrare quest' equazione, si faccia $u = \psi \cos.\xi$, e $t = \psi \,\text{sen}.\,\xi$, cioè si prendano per variabili le coordinate polari della linea dimandata, vale a dire il raggio vettore ψ e l' angolo ξ compreso da esso raggio e dall' asse delle ordinate u; e si avrà

$t^2 + u^2 = \psi^2$, $tt' + uu' = \psi\psi'$, $\varpi' = \sqrt{(\psi'^2 + \psi^2\xi'^2)}$, e

$tu' - ut' = (\psi'\cos.\xi - \psi\xi'\text{sen}\,\xi)\psi\text{sen}.\xi - (\psi'\text{sen}.\xi + \psi\xi'\cos.\xi)\psi\cos.\xi$,

ossia $tu' - ut' = -\psi^2\xi'$:

e conseguentemente l'equazione da integrarsi si ridurrà alla

$$\psi^2 - 2r\frac{\varpi'}{\xi'} + r^2\frac{\psi'^2}{\psi^2\xi'^2} = n^2.$$

Ponendo in quest' ultima equazione in vece di ψ'^2 il suo valore $\varpi'^2 - \psi^2\xi'^2$ dato dalla relazione $\varpi'^2 = \psi'^2 + \psi^2\xi'^2$, essa si riduce alla

$$\psi^2 - 2r\frac{\varpi'}{\xi'} + r^2\frac{\varpi'^2}{\psi^2\xi'^2} - r^2 = n^2, \text{ ossia}$$

$$\left(\psi - r\frac{\varpi'}{\psi\xi'}\right)^2 - \text{R}^2 = 0:$$

equazione che gode della proprietà di essere decomponibile nelle due seguenti

$$\psi - r\frac{\varpi'}{\psi\xi'} - \text{R} = 0,\quad \psi - r\frac{\varpi'}{\psi\xi'} + \text{R} = 0,$$

le quali sono facilmente integrabili.

Incomincio dalla prima, che posta sotto la forma $\left(\psi - \text{R}\right)^2 = r^2\frac{\varpi'^2}{\psi^2\xi'^2}$, ossia $\left(\psi - \text{R}\right)^2 = r^2 + r^2\frac{\psi'^2}{\psi^2\xi'^2}$, dà immediatamente

$$\pm\xi' = \frac{r\psi'}{\psi\sqrt{[(\psi - \text{R})^2 - r^2]}}:$$

equazione nella quale le variabili sono separate.

Ponendo ora $\psi - R = rz$, esprimendo z una nuova variabile, si ha

$\psi = R + rz$, $\sqrt{[(\psi - R)^2 - r^2]} = r\sqrt{(z^2 - 1)}$, $\psi' = rz'$, e conseguentemente

$$\pm \xi' = \frac{rz'}{(R+rz)\sqrt{(z^2-1)}} .$$

In quest' ultima facendo $\sqrt{(z^2 - 1)}$ eguale alla z meno un' altra nuova variabile α, cioè ponendo $\sqrt{(z^2-1)} = z - \alpha$, il che dà

$$z = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right),\ z' = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha^2}\alpha',\ \text{e}\ \sqrt{(z^2 - 1)} = \frac{1-\alpha^2}{2\alpha^2},$$

si dedurrà

$$\pm \xi' = \frac{-2\alpha'}{\alpha^2 + \frac{2R}{r}\alpha + 1} :$$

equazione facilmente integrabile coi metodi ordinarj.

Le due posizioni $\psi - R = rz$, $\sqrt{(z^2 - 1)} = z - \alpha$, testè fatte, danno

$$\psi = R + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right);$$

per tanto all' equazione differenziale

$$\left(\psi - R\right)^2 = r^2 \frac{\varpi'^2}{\psi^2 \xi'^2}$$

soddisfaranno le relazioni seguenti

$$\psi = R + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right),$$

$$\xi = \mp \int \frac{2d\alpha}{\alpha^2 + \frac{2R}{r}\alpha + 1} .$$

Sostituendo questi valori delle variabili ψ, ξ nell' equazione che si vuole integrare cioè $\psi - r\frac{\varpi'}{\psi\xi'} - R = 0$ si trova, che è dessa soddisfatta da

$$\psi = R + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right),\ \text{e}\ \xi = \int \frac{2rd\alpha}{r\alpha^2 + 2R\alpha + r} :$$

queste saranno adunque le coordinate della linea dimandata espresse ambedue colla indeterminata α.

8.

Onde eseguire l'integrazione da cui dipende attualmente l'angolo ξ è bene distinguere partitamente i tre casi, di r eguale, di r maggiore, e di r minore di R.

PRIMO CASO.

Essendo $r = \mathrm{R}$, il valore di ξ si riduce ad $\int \frac{2d\alpha}{(\alpha+1)^2}$; e però sarà $\xi = \mathrm{D} - \frac{2}{\alpha+1}$.

SECONDO CASO

Per essere $\frac{2rd\alpha}{r\alpha^2+2\mathrm{R}\alpha+r} = \frac{2r^2d\alpha}{(r\alpha+\mathrm{R})^2-\mathrm{R}^2+r^2}$, se si porrà quì $r^2 - \mathrm{R}^2 = m^2$, ed $\alpha r + \mathrm{R}$ eguale a λ nuova variabile, ne verrà

$$\frac{2r^2\alpha}{(r\alpha+\mathrm{R})^2-\mathrm{R}^2+r^2} = \frac{2rd\lambda}{\lambda^2+m^2}, \text{ cioè}$$

$$\xi = \mathrm{E} + \frac{2r}{m} \text{Arc.tang.} \frac{\lambda}{m}, \text{ e però sarà}$$

$$\xi = \mathrm{E} + \frac{2r}{\sqrt{(r^2-\mathrm{R}^2)}} \text{Arc.tang.} \frac{r\alpha+\mathrm{R}}{\sqrt{(r^2-\mathrm{R}^2)}}.$$

TERZO CASO

Facendo anche in questo $r\alpha + \mathrm{R} = \lambda$, e ritenendo $\mathrm{R}^2 - r^2 = n^2$, si ha

$$\frac{2rd\alpha}{r\alpha^2+2\mathrm{R}\alpha+r} = \frac{2rd\lambda}{\lambda^2-m^2}, \text{ e però}$$

$$d\xi = \frac{r}{n}\left(\frac{d\lambda}{\lambda-n} - \frac{d\lambda}{\lambda+n}\right), \text{ e quindi}$$

$$\xi = \mathrm{F} + \frac{r}{n} \log. \pm \frac{\lambda-n}{\lambda+n}.$$

Sarà adunque

$$\xi = F + \frac{r}{n} \log. \pm \left(\frac{r\alpha + R - n}{r\alpha + R + n}\right).$$

Le arbitrarie introdotte dalle integrazioni eseguite sono indicate dalle D, E, ed F.

Nel primo di questi tre casi si ha $\psi = \frac{r}{2\alpha}\left(\alpha + 1\right)^2$ e negli altri due sempre

$$\psi = R + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \text{ ovvero } \psi = \frac{r}{2\alpha}\left(\alpha^2 + 2\,\frac{R}{r}\alpha + 1\right).$$

Quindi le coordinate della linea dimandata espresse colla indeterminata α, ossia le sue equazioni fra le coordinate polari e la α medesima saranno.

Nel caso di $r = R$,

$$\psi = \frac{r}{2\alpha}\left(\alpha + 1\right)^2, \quad \xi = D - \frac{2}{\alpha + 1}:$$

Nel caso di $r > R$

$$\psi = R + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \quad \xi = E + \frac{2r}{\sqrt{(r^2 - R^2)}} \text{ Arc. tang.} \frac{r\alpha + R}{\sqrt{(r^2 - R^2)}}:$$

e nel terzo caso, cioè di $r < R$ le seguenti

$$\psi = R + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \quad \xi = F + \frac{r}{n} \log. \pm \left(\frac{r\alpha + R - n}{r\alpha + R + n}\right).$$

Eliminando da ciascuna di queste tre coppie di equazioni l' indeterminata α, si otterranno le equazioni della medesima linea fra le sole loro coordinate polari ψ, e ξ.

9.

Passo ora a considerare l' equazione

$$\psi - r\frac{\varpi'}{\psi\xi'} - R = 0$$

risultante dal secondo fattore dell' equazione differenziale della linea dimandata, come si è veduto al paragrafo settimo. Ponendo in questa $-\psi$ in luogo di ψ, si ottiene la seguente

$$\psi - r\frac{\varpi'}{\psi\xi'} - R = 0,$$

la quale è visibilmente identica con quella già sopra integrata

e proveniente dal primo fattore della medesima equazione differenziale or ora enunciata. Quindi le linee espresse dalla prima di queste equazioni saranno eguali a quelle rappresentate dall' altra; purchè si ritengano reali o possibili i raggi vettori negativi.

In virtù di questa singolarità mi limiterò alla considerazione delle linee espresse dalla equazione differenziale

$$\psi - r \frac{\varpi'}{\psi \xi'} - \mathrm{R} = 0 ,$$

o piuttosto dai suoi integrali. Anzi, siccome nella pratica la r è generalmente minore della R, mi ristringerò a considerare le sole linee rappresentate dagli integrali

$$\psi = \mathrm{R} + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \quad \xi = \mathrm{F} + \frac{r}{n} \log. \pm \left(\frac{r\alpha + \mathrm{R} - n}{r\alpha + \mathrm{R} + n}\right),$$

i quali corrispondono appunto al caso di $r < \mathrm{R}$, come si è veduto nel paragrafo antecedente.

10.

Un accurato esame delle equazioni della linea dimandata potrebbe bastare a far conoscere immediatamente la linea medesima; ma poichè avremo bisogno di sapere in qual modo questa linea dovrà svilupparsi per produrre la sua evolvente, che si è considerata superiormente, così io stimo d' incominciare da un breve esame sopra l'equazione di questa; tanto più che dalla conoscenza della evolvente, si può anche prevedere a un di presso in che debba consistere la linea dimandata.

Richiamo per ciò l' equazione

$\phi = \sqrt{\left(\mathrm{R}^2 + r^2 + 2\mathrm{R}r \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}\right)}$ del paragrafo quinto, la quale per essere

$\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} = -1 + \frac{2}{1+\theta^2}$, si riduce a $\phi = \sqrt{\left[\left(\mathrm{R} - r\right)^2 + \frac{4r\mathrm{R}}{1+\theta^2}\right]}$.

Quest' espressione di ϕ^2 c' insegna, che i valori di ϕ diminuiscono senza interruzione col crescere di θ, e che a $\theta = 0$

corrisponde il massimo, ed a $\theta = \frac{1}{0}$ il minimo, i quali due valori sono evidentemente,

il primo $\sqrt{[(R-r)^2 + 4Rr]}$ ed il secondo $\sqrt{[(R-r)^2]}$, ossia l' uno $R+r$, e l' altro $R-r$. L' espressione stessa insegna, che i valori di θ differenti pel solo segno danno per ϕ dei valori eguali fra loro.

Nelle espressioni dell' angolo ω trovate allo stesso paragrafo quinto, e corrispondenti al caso di cui si parla, cioè di $r < R$, ponendo nella prima $\theta = 0$, e nella seconda $\theta = \frac{1}{0}$, si ha con ambedue

$$\pm\omega = 0 - \frac{r}{n}\log. 1 + C, \text{ ossia}$$

C eguale al valore di ω corrispondente al massimo o minimo raggio vettore; e però supposto l' asse delle ordinate u nella retta secondo la quale cadono questi raggi, sarà $C = 0$. Quindi risulterà

$$\pm\omega = \text{Arc. tang.} \frac{2r\theta}{R+r+(R-r)\theta^2} - \frac{r}{n}\log.\frac{R+r+\theta n}{R+r-\theta n}, \text{ e}$$

$$\pm\omega = \text{Arc. tang.} \frac{2r\theta}{R+r+(R-r)\theta^2} - \frac{r}{n}\log.\frac{n\theta+R+r}{n\theta-R-r}:$$

la prima di queste equazioni darà i valori di ω, che corrispondono a quelli di θ, che sono minori di $\frac{R+r}{n}$, o di $\sqrt{\frac{R+r}{R-r}}$, e la seconda quelli corrispondenti ai valori di θ maggiori della stessa quantità $\sqrt{\frac{R+r}{R-r}}$.

Si ponga

$\frac{r}{n}\log.\pm\left(\frac{R+r+n\theta}{R+r-n\theta}\right) = P$; ed Arc. tang. $\frac{2r\theta}{R+r+(R-r)\theta^2} = Q$, ed $(1+\theta^2)[(R+r)^2+(R-r)^2\theta^2][R+r-(R-r)\theta^2] = D$, e si avrà

$$\left(\frac{dP}{d\theta}\right) = 2r\frac{(R+r)^2+(R-r)^2\theta^4+2r^2\theta^2}{D} + \frac{4rR^2\theta^2}{D}$$

$$\left(\frac{dQ}{d\theta}\right) = 2r\frac{(R+r)^2+(R-r)^2\theta^4+2r^2\theta^2}{D} - \frac{4rR^2\theta^2}{D}.$$

Ma i valori di θ maggiori di $\sqrt{(R+r)}:\sqrt{(R-r)}$ rendono la quantità D negativa, e quelli minori la rendono positiva; dunque in ambedue i casi, avendo riguardo alla pura grandezza, sarà $\left(\frac{dP}{d\theta}\right)$ maggiore di $\left(\frac{dQ}{d\theta}\right)$. Quindi affinchè ai valori positivi di θ corrispondano dei valori positivi dell'angolo ω si dovrà prendere

$$\omega = \frac{r}{n}\log.\frac{R+r+n\theta}{R+r-n\theta} - \text{Arc. tang.}\frac{2r\theta}{R+r+(R-r)\theta^2}, \text{ ed}$$

$$\omega = \frac{r}{n}\log.\frac{n\theta+R+r}{n\theta-R-r} - \text{Arc. tang.}\frac{2r\theta}{R+r+(R-r)\theta^2}.$$

Dalle medesime espressioni di $\left(\frac{dP}{d\theta}\right)$ e $\left(\frac{dQ}{d\theta}\right)$ si desume

$$\left(\frac{dP}{d\theta}\right) - \left(\frac{dQ}{d\theta}\right) = \frac{8rR^2\theta^2}{D}:$$

quantità positiva per tutti i valori di θ, che sono minori di $\sqrt{(R+r)}:\sqrt{(R-r)} = \frac{R+r}{n}$, e negativa per gli altri; e però a misura che i valori di θ si approssimeranno ad $\frac{R+r}{n}$, cresceranno i corrispondenti dell' angolo ω, all' opposto di ciò che succede pei valori corrispondenti del raggio vettore ϕ.

Facendo $\theta = \frac{R+r}{n}$, si ha ω eguale all' infinito e ϕ eguale ad n; adunque la periferia circolare avente il centro nella origine delle coordinate ed il raggio eguale alla n, è un' assintota della linea espressa dalle equazioni

$$\phi = \sqrt{\left[R^2 + r^2 + 2Rr\frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}\right]},$$

$$\omega = \frac{r}{n}\log.\frac{R+r+n\theta}{R+r-n\theta} - \text{Arc. tang.}\frac{2r\theta}{R+r+(R-r)\theta^2}.$$

In queste medesime equazioni col cambiare θ in $-\theta$, non si viene a cambiare in esse che il solo segno al secondo membro della seconda; e perciò la retta nella quale cade il massimo raggio vettore sarà un asse della curva rappresentata da esse.

Riunendo tutte le proprietà dichiarate della curva espressa dalle due equazioni considerate, agevolmente si comprende, che sarà essa (Fig. 3) una spirale . . C'BCD . ., che ha un regresso in B, due flessi, che si avvicina continuamente alla periferia circolare *mns* avente il centro in A origine delle coordinate x, y, ed il raggio eguale ad $n = \sqrt{(R^2 - r^2)}$, senza mai poterla toccare; e che essa è composta di due rami BCE . ., BC' . . perfettamente eguali fra loro.

Facendo sopra le due equazioni

$$\phi = \sqrt{\left[R^2 + r^2 + 2Rr \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}\right]},$$

$$\omega = \frac{r}{n} \log. \frac{n\theta + R + r}{n\theta - R - r} - \text{Arc. tang.} \frac{2r\theta}{R + r + (R - r)\theta^2}$$

le stesse riflessioni, che fatte si sono per le due precedenti, si verrà a concludere similmente, che la curva da esse rappresentata è una spirale . . *c'bcd* . ., la quale ha un regresso in b, a cui corrisponde il raggio vettore $Ab = R - r$; che si approssima continuamente alla periferia *mns*, senza giammai toccarla, ossia che questa periferia è anche un'assintota di quest' altra spirale; e che la medesima è composta come l'antecedente di due rami *bcd* . ., *bc'* . . eguali perfettamente fra loro.

Se nelle stesse due equazioni ultimamente esposte si farà $\theta = \frac{1}{\delta}$, δ esprimendo una nuova indeterminata, verranno le medesime espresse così

$$\phi = \sqrt{\left[R^2 + r^2 + 2Rr \frac{\delta^2 - 1}{\delta^2 + 1}\right]},$$

$$\omega = \frac{r}{n} \log. \frac{n + (R + r)\delta}{n - (R + r)\delta} - \text{Arc. tang.} \frac{2r\delta}{R - r + (R + r)\delta^2}.$$

Queste equazioni in cui l' angolo ω cresce col crescere della indeterminata δ, potranno con vantaggio preferirsi alle due antecedenti, quando vorrà costruirsi la linea per punti.

Porrò fine all'esame dell' equazione della involvente, e passerò a parlare della sua evoluta, cioè della curva dimandata.

11.

L' equazione $\psi = R + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$,
rinvenuta al paragrafo nono, somministra $\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\right) = \frac{r}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}\right) = \frac{r}{\alpha^3}$; e ponendo $\left(\frac{d\psi}{d\alpha}\right) = 0$, si avrà $1 - \frac{1}{\alpha^2} = 0$ dal che $\alpha = \pm 1$, e però $\left(\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}\right) = \pm r$, e $\psi = R \pm r$. Quindi sarà $R + r$ il minimo ed $R - r$ il massimo valore di ψ (§. 57); ciò che è singolare per essere il minimo $R + r$ maggiore del massimo $R - r$.

Questa singolarità ci previene, che gli infiniti valori dei raggi vettori della curva dimandata formano almeno due serie affatto distinte l' una dall' altra: appunto come si vedrà ai paragrafi dodicesimo e quattordicesimo.

Determinando nell' altra equazione $\xi = F + \frac{r}{n}\log.\frac{r\alpha + R - n}{r\alpha + R + n}$ del citato paragrafo la costante F per modo, che l'angolo ξ sia zero, quando $\alpha = 1$, si ha

$F = \frac{r}{n}\log.\frac{R+r+n}{R+r-n}$; e però sarà $\xi = \frac{r}{n}\log.\left(\frac{R+r+n}{R+r-n}\right)\left(\frac{r\alpha+R-n}{r\alpha+R+n}\right)$,
ossia

$$\xi = \frac{r}{n}\log.\frac{(R+r+n)\alpha+R+r-n}{(R+r-n)\alpha+R+r+n}, \text{ o meglio}$$

$$\xi = \frac{r}{n}\log.\pm\frac{(R+r+n)\alpha+R+r-n}{(R+r-n)\alpha+R+r+n};$$

giacchè nell' equazione $\psi - r\frac{\varpi'}{\psi\,\xi'} - R = 0$ vi entra il solo differenziale dell' angolo ξ.

Siccome tutti i valori di α compresi fra $-\frac{R+n}{r}$, ed $\frac{n-R}{r}$ rendono negativa la quantità $\frac{(R+r+n)\alpha+R+r-n}{(R+r-n)\alpha+R+r+n}$,
e tutti gli altri la rendono positiva; così la linea sarà composta di due parti, l' una delle quali avrà per equazioni

$$\psi = \mathrm{R} + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \quad \xi = \frac{r}{n}\log.\frac{(\mathrm{R}+r+n)\alpha+\mathrm{R}+r-n}{(\mathrm{R}+r-n)\alpha+\mathrm{R}+r+n},$$

e l' altra

$$\psi = \mathrm{R} + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \xi = \frac{r}{n}\log.\frac{(\mathrm{R}+r+n)\alpha+\mathrm{R}+r-n}{(n-\mathrm{R}-r)\alpha-\mathrm{R}-r-n}.$$

12.

Se nell' espressione $\mathrm{R} + \frac{r}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$, e nella

$\frac{r}{n}\log.\frac{(\mathrm{R}+r+n)\alpha+\mathrm{R}+r-n}{(\mathrm{R}+r-n)\alpha+\mathrm{R}+r+n}$, o nella sua equivalente

$$\frac{r}{n}\log.\left[\frac{\mathrm{R}+r+n}{\mathrm{R}+r-n} - \frac{2n}{(\mathrm{R}-n)\alpha+r}\right]$$

si pongano in vece di α dei numeri maggiori dell' unità, si ottengono altrettanti valori per le coordinate ψ, ξ, i quali sono positivi e crescono col crescere i numeri sostituiti; e finalmente, ponendo α eguale all' infinito, si ha ψ eguale anch' esso all' infinito, e

$$\xi = \frac{r}{n}\log.\frac{\mathrm{R}+r+n}{\mathrm{R}+r-n}.$$

La curva ha adunque un ramo, che si allontana continuamente dalla origine delle coordinate e dall' asse delle u, e la cui tangente NN (Fig. 4) nel punto corrispondente al raggio vettore eguale all' infinito fa coll' asse delle medesime ordinate u l' angolo eguale ad

$$\frac{r}{n}\log.\frac{\mathrm{R}+r+n}{\mathrm{R}+r-n}.$$

Chiamo p la perpendicolare tirata dall' origine delle coordinate alla toccante la curva nel punto a cui corrispondono le coordinate ψ, ξ. Essendo in generale $p = \psi^2 . \frac{\xi'}{\varpi'}$, e nel caso presente

$$\psi = \mathrm{R} + \frac{r}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right), \ \psi\xi' = \frac{r}{\alpha}, \varpi' = \sqrt{\left(\psi'^2+\psi^2\xi'^2\right)} = \frac{r}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right),$$

in questo medesimo caso sarà

$$p = r + \frac{2R}{\alpha + \frac{1}{\alpha}}, \text{ ovvero } p = \frac{r\psi}{\psi - R},$$

per essere $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2 \cdot \frac{\psi - R}{r}$.

La prima di queste espressioni della p significa, che ai valori anzidetti di α corrispondono dei valori per p, i quali diminuiscono continuamente, aumentando α, e che l'ultimo di essi, cioè quello che corrisponde ad α ed anche a ψ infinito eguaglia la r.

Da ciò deriva, che il ramo suddetto della curva in quistione, volge costantemente all' asse delle u la concavità, e che la distanza fra l' origine delle coordinate alla toccante NN, ossia assintota del ramo stesso, è eguale ad r.

Nelle medesime espressioni delle coordinate ψ, ξ facendo $\alpha = m$, si ha

$$\psi = R + \frac{r}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right), \text{ e } \xi = \frac{r}{n} \log. \frac{(R+r+n)m+R+r-n}{(R+r-n)m+R+r+n};$$

e ponendo $\alpha = \frac{1}{m}$, si ottiene

$$\psi = R + \frac{r}{2}\left(\frac{1}{m} + m\right), \text{ e } \xi = -\frac{r}{n} \log. \frac{(R+r+n)m+R+r-n}{(R+r-n)m+R+r+n};$$

cioè si hanno per ψ due valori identicamente eguali, e per ξ due valori pure eguali in grandezza ma di segni dissimili. Questa proprietà manifesta che l'asse delle ordinate u è anche un asse del presente ramo della curva in quistione, e la retta N' N' distante dall' origine A di r, e facente coll' asse medesimo l' angolo eguale a

$$-\frac{r}{n} \log. \frac{R+r+n}{R+r-n},$$

è un' altra assintota del medesimo.

Si concluda per tanto che la curva medesima ha un ramo . . C' B C . ., il quale si assomiglia in certo modo a quello di una Iperbola conica.

13.

Essendo $\varpi' = \frac{r}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)$, come si è veduto quì sopra, ossia

$$d\varpi = \frac{r}{2}\left(d\alpha + \frac{d\alpha}{\alpha^2}\right),$$ si avrà, integrando

$$\varpi = \frac{r}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) + \mathrm{H},$$

H esprimendo una costante arbitraria.

Supposto che l' arco ϖ incominci al punto B a cui corrisponde il minimo raggio vettore e però $\alpha = 1$, si ha

$$0 = \frac{r}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) + \mathrm{H},$$ cioè $\mathrm{H} = 0$. Quindi sarà

$$\varpi = \frac{r}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Le equazioni $\psi = \mathrm{R} + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$,

$$\varpi = \frac{r}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$$

danno $\psi + \varpi = \mathrm{R} + r\alpha$, ossia $\alpha = \frac{\psi + \varpi - \mathrm{R}}{r}$; e ponendo questo valore di α nella seconda di esse equazioni o nella $\frac{2\varpi}{r} = \alpha - \frac{1}{\alpha}$ sua equivalente, si ottiene

$$\frac{2\varpi}{r} = \frac{\psi + \varpi - \mathrm{R}}{r} - \frac{r}{\psi + \varpi - \mathrm{R}}:$$

equazione dalla quale si desume

$$\varpi = \sqrt{[(\psi - \mathrm{R})^2 - r^2]}, \text{ o } \psi = \mathrm{R} + \sqrt{(\varpi^2 + r^2)}.$$

Vale a dire l'arco espresso pel raggio vettore corrispondente, e reciprocamente questo espresso per l'arco.

Così eliminando l' α dalle due equazioni

$$\varpi = \frac{r}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right), \quad \xi = \frac{r}{n}\log.\frac{(\mathrm{R}+r+n)\alpha + \mathrm{R}+r-n}{(\mathrm{R}+r-n)\alpha + \mathrm{R}+r+n},$$

si avrà un' equazione fra ϖ, e ξ, mediante la quale agevolmente si potrà avere una di queste quantità rappresentata per l'altra.

14.

Eguagliando a zero il valore di ψ, si ha l' equazione

$a^2 + 2 \frac{R}{r} a + 1 = 0$, la quale dà $a = \frac{-R \pm n}{r}$.

Sostituendo nelle epressioni delle ψ, ξ in vece di a la quantità $-\frac{R+n+m}{r}$, e faccendo le rispettive riduzioni, si ottiene

$$\psi = -\frac{m(m+n)}{R+n+m}, \text{ e } \xi = \frac{r}{n} \log. \frac{(m+2n)(R+r+n)}{m(R+r-n)},$$

cioè per ψ un valore negativo, e per ξ un valore positivo, ammesso che m esprima un numero positivo.

Evidentemente poi ad $a = -\frac{1}{0}$ corrisponde $\psi = -\frac{1}{0}$, e $\xi = \frac{r}{n} \log. \frac{R+r+n}{R+r-n}$, e ad $a = -\frac{R \pm n}{r}$, $\psi = 0$, e $\xi = \pm \frac{1}{0}$.

Per trovare il punto di questo ramo, a cui corrispondono le coordinate

$$-\frac{m(m+n)}{R+n+m}, \frac{r}{n} \log. \frac{(m+2n)(R+r+n)}{m(R+r-n)}$$

esposte sopra, si farà (Fig. 4.) l' angolo $u A n$ eguale ad $\frac{r}{n} \log. \frac{(m+2n)(R+r+n)}{m(R+r-n)}$ nel prolungamento AM del suo lato An si prenderà la parte AM eguale ad $\frac{m(m+n)}{R+n+m}$, ed M sarà il punto dimandato.

L' espressione $\frac{r\psi}{\psi - R}$ della p, cioè della perpendicolare tirata dall' origine delle coordinate alla toccante la curva nel punto corrispondente alle ψ, ξ, in questo caso equivale alla seguente

$$\frac{r . AM}{AM + R}:$$

quantità che risulta eguale ad r facendo il raggio AM infinito, e che diminuisce continuamente col diminuire il raggio medesimo; e finalmente si annulla coll'annullarsi del raggio stesso.

Da queste proprietà delle coordinate ψ, ξ e della perpendicolare p, deriva che un ramo della curva in quistione ha una estremità ad una distanza infinita dalla origine A, alla quale corrisponde una toccante ossia una retta assintota comune con quella dell' altro ramo BC . . ; che essa curva gira attorno all' origine delle coordinate ; che non ha verun punto singolare per tutto questo tratto ; e che dopo un numero infinito di giri passa per l'origine stessa. Vale a dire, che è essa una spirale della figura della

. . OMa . . A (Fig. 4).

Sostituendo $\frac{-r}{R+n+m}$ in luogo di α nelle medesime espressioni delle coordinate ψ, ξ, si ottiene

$$\psi = -\frac{m(m+n)}{R+n+m}, \text{ e } \xi = -\frac{r}{n} \log. \frac{(2n+m)(R+r+n)}{m(R+r-n)} .$$

Paragonando questi valori con quelli trovati sopra corrispondenti ad $\alpha = -\frac{R+n+m}{r}$ si vede, che essi differiscono da quelli pel solo segno di ξ; adunque ai valori di a negativi e minori in grandezza di $\frac{R-n}{r}$, ossia di $\frac{r}{R+n}$ corrisponde una spirale . . O'M'a' . . A eguale perfettamente a quella di cui si è parlato poc' anzi.

15.

Qualunque sia il ramo della curva rappresentata dalle equazioni in quistione si ha sempre, come si è veduto al paragrafo tredicesimo.

$$\varpi = \frac{r}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) + H;$$

e però, ammesso pel ramo che ora si considera, che il principio dell' arco stesso si trovi all' origine delle coordinate, ossia che esso arco incominci quando $\alpha = -\frac{R+n}{r}$, si avrà

$$0 = \frac{r}{2}\left(-\frac{R+n}{r} + \frac{r}{R+n}\right) + H, \text{ cioè } H = n:$$

valore che rende $\varpi = \frac{r}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) + n$.

Quindi la porzione di questo ramo intercetta fra l'origine delle coordinate ed il punto a cui corrisponde l' attuale raggio vettore ψ sarà eguale ad

$$\frac{r}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) - n.$$

Chiamando f la somma di quest' ultima porzione congiunta colla n si avrà l'equazione $f = \frac{r}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$,

la quale combinata colla $\psi = R + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$

somministra anch' essa, come si è trovato per l' altro ramo al paragrafo tredicesimo,

$$f = \sqrt{[(\psi - R)^2 - r^2]}, \text{ o } \psi = R + \sqrt{(f^2 + r^2)}, \text{ cioè}$$
$$f = \sqrt{[(AM + R)^2 - r^2]}, \text{ e } - AM = R + \sqrt{(f^2 + r^2)}.$$

Similmente, eliminando l' α dalle equazioni

$$f = \frac{r}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right),\ \xi = \frac{r}{n} \log. \frac{(R+r+n)\alpha + R + r - n}{(R+r-n)\alpha + R + r + n},$$

si otterrà un'equazione colla quale si avrà una delle quantità f, ξ formata coll'altra.

16.

Facendo per le equazioni $\psi = R + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$,

$$\xi = \frac{r}{n} \log. \frac{n - R - r - (R+r+n)\alpha}{n + R + r + (R+r-n)\alpha}$$

quanto si è fatto quì sopra per le altre due, si verrà a concludere, che la linea rappresentata da esse è la spirale *ars* A . . *r'ars* . . A (Fig. 5), la quale ha il raggio vettore massimo A*a* eguale ad R $-$ r; che è composta dei due rami *ars* . . A, *ar'* . . A perfettamente eguali fra loro, i quali dopo un infinito numero di giri senza nessuna singolarità terminano nella origine delle coordinate.

Quest' ultima spirale insieme alle due (Fig. 4)

A . . *a'*M'O' . ., A . . *a*MO . .

costituiscono evidentemente una sola e medesima linea (Fig. 4 e 5)

. . OMa . . A . . $r'ars$ . . A . . a'M'O' . . .

17.

Supposto per questo ramo, che l' arco ϖ abbia il principio in a a cui corrisponde $\alpha = -1$, l' equazione $\varpi = \frac{r}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) + \mathrm{H}$, la quale sussiste qualunque sia il ramo della linea rappresentata dalla differenziale

$$\psi - r\frac{\varpi'}{\psi\xi'} - \mathrm{R} = 0,$$

somministra $0 = \frac{r}{2}(-1 + 1) + \mathrm{H}$, cioè $\mathrm{H} = 0$; quindi pel ramo medesimo sarà

$$\varpi = \frac{r}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Sostituendo in questa espressione di ϖ in luogo di α il suo valore $\frac{n-\mathrm{R}}{r}$ che annulla il raggio vettore, si ottiene $\varpi = n$. Adunque la lunghezza dell' intero arco ars . . A è eguale ad $n = \sqrt{(\mathrm{R}^2 - r^2)}$: il che è singolare.

Così eliminando l' α dalle equazioni

$$\varpi = \frac{r}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right), \psi = \mathrm{R} + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

si ottiene come al paragrafo tredicesimo

$$\varpi = \sqrt{[(\psi - \mathrm{R})^2 - r^2]}, \text{ ec.}$$

18.

Sviluppando la spirale ars . . A (Fig. 5) incominciando al punto a, essa descrive col termine a medesimo l' altra spirale bcd . . A (Fig. 3.) e sviluppata per intero eguaglierà, per ciò che si è veduto poc'anzi, la n cioè il raggio del cerchio mns. E continuando lo sviluppo nella linea A . . a'M'O' . . (Fig. 4)

come una sola e medesima colla *ars* . . A già sviluppata, ossia la spirale A . . a'M' O' . . incominciando in A, e supposta unita al termine mobile di essa una retta eguale alla $n = \sqrt{(R^2 - r^2)}$, ci produrrà la porzione della spirale . . C'B (Fig. 3.) che è intercetta fra il circolo *mns* ed il suo punto di flesso. Così sviluppando la parte BC' . . (Fig. 4) del ramo . . C'BC . . incominciando in B, produrrassi l'altra parte della medesima spirale . . C'B (Fig. 3), cioè quella sua parte intercetta fra il flesso anzidetto e B regresso.

Similmente, con uno sviluppo analogo delle altre parti *ar'* . . A (Fig. 5), A . . *a*MO . . , BC . . (Fig. 4) si produrranno le porzioni *bcd* . . , . . DCB (Fig. 3) della evolvente in quistione.

19.

Malgrado sia fuori d'ogni dubbio, che le curve indicate (Fig. 4. e 5) da . . C'BC . . . . . OM*a* . . A, A . . *r'ars* . . A, O'*a*'M' . . A siano quelle che si dimandarono, cioè quelle, una cui evolvente è dotata della proprietà di avere costantemente eguali ad r le porzioni delle sue toccanti intercette fra i punti di contatto e la periferia circolare avente il centro in A ed il raggio eguale ad R, non ostante io credo che non dispiacerà, se si farà vedere che cosiffatta proprietà è un' immediata conseguenza delle loro equazioni finite trovate sopra; ed incomincio dal ramo . . C BC . . (Fig. 6).

La retta MV sia toccante la curva BMC in M ed eguale alla lunghezza dell' arco BM; e la VT sia perpendicolare alla stessa VM ed eguale alla r lunghezza del manubrio: il punto T dovrà essere nella periferia circolare xy, che ha il centro in A ed il raggio eguale alla R distanza degli assi attorno cui rotano il manubrio e la superficie cilindrica alla quale si avvolge la fune.

Tirisi mVn parallela alla ABu; e si ponga

$$AP = u,\ PM = t,\ AM = \psi,\ PAM = \xi,\ MV = \varpi$$

correlativamente a quello che si è fatto al paragrafo settimo.

Essendo

$$AQ = AP - mV - Vn = AP - VM\cos.mVM - VT\,\mathrm{sen}.mVM,$$
$$QT = PM - mM + nT = PM - VM\,\mathrm{sen}.mVM + VT\cos.mVM,$$ ed
$$\overline{AT}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{QT}^2,$$ si avrà
$$\overline{AT}^2 = \left(u - \varpi\frac{u'}{\varpi'} - r\frac{t'}{\varpi'}\right)^2 + \left(t - \varpi\frac{t'}{\varpi'} + r\frac{u'}{\varpi'}\right)^2,$$ ossia
$$\overline{AT}^2 = \psi^2 + \varpi^2 + r^2 - \frac{2\psi}{\pi'}\left(\varpi\psi' + r\psi\xi'\right).$$

Ma le equazioni di questo ramo, trovate al paragrafo undicesimo, danno, come si è veduto ai paragrafi dodicesimo e tredicesimo,

$$\psi\xi' = \frac{r}{a},\ \varpi' = \frac{r}{a}\left(1 + \frac{1}{a^2}\right),\ \text{e}\ \varpi = \frac{r}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right);$$ e però sarà
$$\varpi\psi' + r\psi\xi' = \frac{r^2}{2}\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)^2 a + \frac{r^2}{a} = \frac{r^2}{4a}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2,$$ e
$$\frac{2\psi}{\varpi'}\left(\varpi\psi' + r\psi\xi'\right) = \frac{r}{2}\left[R + \frac{r}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]\left(a + \frac{1}{a}\right) = Rr\left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{r^2}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2.$$

Quindi si avrà

$$\overline{AT}^2 = \left(R + \frac{r}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right)^2 + \frac{r^2}{4}\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + r^2 - Rr\left(a + \frac{1}{a}\right) - \frac{r^2}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2,$$ ossia
$$AT = R.$$

Vale a dire il punto T si troverà nella periferia xy, che ha il centro in A ed il raggio eguale alla R; appunto come si è detto.

Per la spirale OMa . . A (Fig. 7), sia condotta la toccante MV eguale alla lunghezza dell' arco Ma . . A aumentata della n, la VT perpendicolare alla medesima toccante ed eguale alla r; e sieno congiunte le rette AM, AT.

La figura VMAT dà

$$\overline{AT}^2 = \overline{VT}^2 + \overline{VM}^2 + \overline{AM}^2 - 2VT.VM\cos.TVM - 2VM.MA\cos.VMA$$
$$+ 2VT.MA\cos.(TVM + VMA);$$

e però sarà

$$\overline{AT}^2 = r^2 + s^2 + \psi^2 + 2s\psi\frac{\psi'}{\varpi'} - 2r\psi\frac{\psi\xi'}{\varpi'},$$

per essere l' angolo MVT retto, $\cos.\,VMA = \frac{\psi'}{\varpi'}$,

cos. (TVM + VMA) = — sen. VMA = — $\frac{\psi\xi'}{\varpi'}$; ed AM = — ψ .

Ma ponendo nel polinomio

$$r^2 + f^2 + \psi^2 + 2f\psi\frac{\psi'}{\varpi'} - 2r\psi\frac{\psi\xi}{\varpi'}$$

in luogo delle quantità f, ψ, ψ', ϖ', ξ' i rispettivi loro valori trovati sopra, esso polinomio si riduce ad R^2; adunque sarà AT = R, come precedentemente.

In un modo affatto simile a quello seguito pel ramo C'BC (Fig. 6) si dimostra, che si verifica una analoga proprietà anche per la spirale A . . *r'ars* . . A (Fig. 5).

20.

L' equazione $\psi - r\frac{\varpi'}{\psi\xi'} - R = 0$ dà

$$r = (\psi - R)\frac{\psi\xi'}{\varpi'},$$

cioè pei due rami CBC', A . . *r'ars* . . A (Fig. 5, e 6) somministra

$$r = (AM - R)\, AM\frac{\xi'}{\varpi'},$$

e pel ramo OM*a* . . A (Fig. 7) in vece

$$r = (AM + R)\, AM\frac{\xi'}{\varpi'};$$

e però essendo AM $\frac{\xi'}{\varpi'}$, eguale al seno dell' angolo VMA, i tre punti M, T, ed A saranno in una stessa retta. Queste proprietà veramente singolari si potevano dedurre anche dalle equazioni trovate ai paragrafi tredicesimo e quindicesimo.

21.

Ora sia A (Fig. 8) il punto intorno al quale deve rotare la linea . . CMB, le cui coordinate ξ = MAB, ψ = MA sono quelle somministrate dalle equazioni

$$\psi = R + \frac{r}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right),\ \xi = \frac{r}{n}\log.\frac{(R+r+n)a+R+r-n}{(R+r-n)a+R+r+n},$$

dando ad a dei valori positivi; ed L rappresenti il punto attorno al quale deve rotare il manubrio VL, al cui termine V è legata la fune CMV, avente la parte VM toccante la curva in M ed eguale in lunghezza alla lunghezza dell'arco BM, e l'altra parte CM avvolta alla curva medesima ..CMB, e fissata al punto C della curva stessa.

Facendo rotare la linea ..CMB insieme al suo asse ABu attorno al punto A, in modo che diminuisca l'angolo MAu, si aumenterà la porzione MC della fune avvolta alla curva ed il manubrio VL roterà attorno al punto L; dimodochè, quando sarà annullato l'angolo $\xi =$ MAB, il manubrio cadrà nella retta Lr ed i punti B e V troveransi ambedue in r.

Conducansi la LD perpendicolare alla MA, e la AT perpendicolare al prolungamento VT della toccante MV; e si avrà

$$\mathrm{AT} = r + \frac{2\mathrm{R}}{a + \frac{1}{a}} = \frac{r\psi}{\psi - \mathrm{R}}, \text{ e sen. DLV} = \text{sen. VMA} = \frac{\psi\xi'}{\varpi'} = \frac{2a}{1+a^2} = \frac{r}{\psi - \mathrm{R}}$$

come si è veduto ai paragrafi dodicesimo e ventesimo.

Se nel principio della rotazione l'assintota del ramo BMC.., cioè la retta NN sarà parallela alla AL, ossia sarà

$$\xi = \frac{r}{n} \log. \frac{\mathrm{R}+r+n}{\mathrm{R}+r-n},$$

l'angolo VLD indicherà la rotazione del manubrio LV corrispondente a quella dell'asse ABu, che è espressa dall'angolo eguale ad

$$\frac{r}{n}\log. \frac{\mathrm{R}+r+n}{\mathrm{R}+r-n} - \frac{r}{n} \log. \frac{(\mathrm{R}+r+n)a+\mathrm{R}+r-n}{(\mathrm{R}+r-n)a+\mathrm{R}+r+n},$$

$$\text{ossia ad } \frac{r}{n} \log. \frac{ra+\mathrm{R}+n}{ra+\mathrm{R}-n}$$

pel paragrafo undicesimo.

Colle due espressioni $\frac{2a}{1+a^2}$, $\frac{r}{n} \log. \frac{ra+\mathrm{R}+n}{ra+\mathrm{R}-n}$

conoscendosi una delle tre quantità a, VLD, e la rotazione dell'asse Au, agevolmente si determineranno le altre due.

Se nel principio della rotazione l'assintota NN non sarà parallela alla AL, allora onde avere l'angolo descritto dal

manubrio ad un istante qualunque del tempo in cui dura la rotazione medesima, converrà levare dall'angolo DLV corrispondente a questo istante il valore che aveva il medesimo angolo nel primo istante del suo moto.

22.

Nominata T la tensione della fune, F una forza applicata alla curva ..CMB ed atta ad equilibrare la tensione medesima, e B il braccio di questa forza; evidentemente si ha T. TA = F. B, e però

$$F = \frac{T}{B} . AT = \frac{T}{B}\left(r + \frac{2R}{a + \frac{1}{a}}\right), \text{ ovvero } F = \frac{T}{B} . \frac{r\psi}{\psi - R} .$$

Queste equazioni, colle quali agevolmente si ottiene il valore di F corrispondente ad uno qualunque delle α, ψ, ξ insegnano, che la forza F medesima aumenta diminuendo α, ψ, ξ, ossia avanzandosi la rotazione.

Delle analoghe proprietà hanno luogo pel ramo A . . *r'ars* . . A (Fig. 5).

Stante queste ultime proprietà saranno rarissimi i casi in cui sarà vantaggioso in pratica l' uso di questi due rami della curva in quistione, per tanto non farò intorno ad essi altre ricerche, e passerò in vece a parlare del ramo OM*a* . . A . . *a*'M'O' (Fig.4), il quale avendo delle proprietà affatto contrarie, si potrà usare vantaggiosamente in molte occasioni.

23.

I punti L ed A (Fig.9) siano analoghi ai due similmente denominati nella figura antecedente: l'assintota della curva a cui si avvolge la fune nel principio del moto sia parallela alla retta LA, ossia l'angolo compreso dalla LA e dalla retta nella quale ha l'origine l'angolo ξ eguagli

$$\frac{r}{n} \log. \frac{R + r + n}{R + r - n} ;$$

e ad un istante qualunque del tempo in cui dura la rotazione, la curva medesima a cui si avvolge la fune, trovisi nella posizione OMa . . A, la fune in quella di EMV avente la parte EM avvolta; e l'altra tangente in M alla curva stessa OMa . . A; ed il manubrio nel medesimo istante sia espresso dalla retta LV.

La retta AT perpendicolare tirata dal punto A alla toccante MV, sarà eguale ad $r + \frac{2R}{a+\frac{1}{a}}$, intendendo quì per a un numero negativo ed in grandezza maggiore di $\frac{R+n}{r}$, e però chiamata T la tensione della fune, B il braccio della forza applicata alla curva OMa . . A, e che produce questa tensione, ed F la forza stessa, sarà

$$B.\,F = T.\,AT, \text{ e quindi}$$

$$F = \frac{T}{B}\,AT = \frac{T}{B}\left(r + \frac{2R}{a+\frac{1}{a}}\right) = \frac{T}{B}\cdot\frac{r\psi}{\psi - R}, \text{ ossia}$$

$$F = \frac{T}{B}\cdot\frac{r.AM}{AM+R} = r\,\frac{T}{B}\cdot\frac{AM}{ML}:$$

quantità che diminuiscono diminuendo AM.

Ma col progredire la rotazione della linea OMa . . A intorno al punto A, diminuisce evidentemente il raggio vettore MA, adunque, supposto che fra' la tensione T costante e la forza applicata alla curva OMa . . A non si chiegga che il puro equilibrio, si dovrà diminuire continuamente questa forza; ciò che sarà sommamente vantaggioso nella pratica, perchè conforme ai bisogni degli Esseri coi quali si produce generalmente questo movimento di rotazione.

Colla espressione $\frac{T}{B}\left(r + \frac{2R}{a+\frac{1}{a}}\right)$ o colla equivalente $r\,\frac{T}{B}\cdot\frac{AM}{ML}$ facilmente avrassi la grandezza della forza F per equilibrare la tensione T, qualunque sia la posizione presa dalla linea OMa . . A col rotare intorno al punto A.

Scomponendo la tensione T in due, una diretta a seconda del raggio vettore MA, e l' altra perpendicolare al medesimo, la prima di queste componenti risulta eguale a T.cos.VMA. Ma essendo $\frac{\psi'}{\varpi'}$ l'espressione generale di cos.VMA, ed $\frac{r}{2}\left(1-\frac{1}{a^2}\right)$, $\frac{r}{2}\left(1+\frac{1}{a^2}\right)$ i rispettivi valori di ψ', ϖ', sopra trovati, per cui

$\frac{\psi'}{\varpi'}=\frac{a^2-1}{a^2+1}=1-\frac{2}{a^2+1}$; così si avrà T cos.VMA $=T-\frac{2T}{a^2+1}$: quantità che diminuisce col diminuire di a.

Di quì appare che la componente di cui si parla, la cui azione è unicamente diretta a premere l'asse attorno al quale rota la curva OMa..A diminuisce a misura che si fa rotare pel verso aMO la linea OMa..A attorno all' asse medesimo.

Le rette LD, LV essendo perpendicolari rispettivamente alle ML, MV, sarà l'angolo LDV eguale al LMV compreso dal raggio vettore MA e dalla toccante corrispondente MV; ma il seno dell' AMV è eguale a $\frac{-2a}{a^2+1}$;

adunque il seno dell' angolo VLD, il quale esprime quanto il manubrio abbia rotato attorno al punto L, sarà anch' esso eguale a

$$-\frac{2a}{a^2+1}=\frac{-r}{\psi-R}=\frac{-r}{-AM-R}=\frac{r}{ML}.$$

Quest' ultimo risultamento si può cavare anche dalle cose esposte al paragrafo ventesimo.

Così, essendo

$$\frac{r}{n}\log.\frac{(R+r+n)a+R+r-n}{(R+r-n)a+R+r+n}$$

l' angolo compreso dalla CA e dalla retta ove ha l' origine l'angolo ξ, ed $\frac{r}{n}\log.\frac{R+r+n}{R+r-n}$ esprimendo quello compreso da quest' ultima retta e dalla assintota, sarà

$$\frac{r}{n}\log.\frac{(R+r+n)a+R+r-n}{(R+r-n)a+R+r+n}-\frac{r}{n}\log.\frac{R+r+n}{R+r-n},\ \text{ossia}$$

$$\frac{r}{n} \log. \frac{ra+R-n}{ra+R+n}$$

il valore dell' angolo esprimente la rotazione fatta dalla curva OMa . . A attorno al punto A.

Ponendo quest' ultima espressione eguale ad A, e l' angolo AMV eguale ad M, si avranno le due equazioni

$$A = \frac{r}{n} \log. \frac{ra+R-n}{ra+R+n}, \quad \text{sen. } M = -\frac{2a}{a^2+1},$$

colle quali si potranno sempre determinare due delle tre quantità A, M, ed a corrispondenti ad un dato valore della terza.

Se nel principio del moto l'assintota della linea . . OMa . . A non sarà parallela alla AL, come ho supposto sopra: chiamate A', M', i valori di A, M nel principio di questo moto, gli angoli che indicheranno le rotazioni della curva OMa e del manubrio ad un istante qualunque, saranno $A - A'$, $M - M'$.

Facendo $a = -\frac{R+n}{r}$ nelle equazioni esprimenti i valori di A ed M, si ha A eguale all' infinito, e sen. $M = \frac{r}{R}$. Adunque, affinchè il manubrio descriva l' angolo avente per seno $\frac{r}{R}$, la curva a cui si avvolge la fune dovrà rotare un numero infinito di volte intorno al punto A.

24.

Nelle arti volendo approffittare della curva sin quì considerata, bisognerà naturalmente limitarsi a costruirne una semplice sua porzione, essendo essa indefinita d' ambe le parti; e quindi determinare opportunamente la lunghezza della fune.

Trà le varie condizioni a cui può assoggettarsi la enunciata porzione di curva che si vuole costruire, io ammetterò questa: che sieno conosciute e date le distanze che dovranno avere le sue estremità dal punto intorno al quale dovrà rotare, cioè le lunghezze dei due raggi vettori corrispondenti

ai termini di essa, e determinerò tutte le altre correlative proprietà più interessanti.

Siano ψ', ψ'' le lunghezze dei raggi vettori, che corrispondono ai termini dell' arco che si vuole costruire; e propriamente sia ψ' il massimo e ψ'' il minimo degli infiniti raggi vettori corrispondenti all' arco stesso.

L' equazione $\psi = \mathrm{R} + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$ somministra

$$r\alpha = \psi - \mathrm{R} \pm \sqrt{(\psi^2 - 2\,\mathrm{R}\,\psi + n^2)};$$

e però i valori di α corrispondenti ai termini dell' arco, che consideriamo, saranno

$$-\frac{1}{r}[\psi'+r+\sqrt{(\psi'^2+\mathrm{R}\psi'+n^2)}],\ -\frac{1}{r}[\psi''+\mathrm{R}+\sqrt{(\psi''^2+2\mathrm{R}\psi''+n^2)}].$$

Quindi i numeri che si dovranno sostituire ad α nelle espressioni

$$\mathrm{R} + \frac{r}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right),\ \frac{r}{n}\log.\frac{(\mathrm{R}+r+n)\alpha+\mathrm{R}+r-n}{(\mathrm{R}+r-n)\alpha+\mathrm{R}+r+n}$$

onde avere le coordinate per costruire l' arco medesimo, saranno quelli i quali cadranno fra i due quì esposti.

I medesimi due valori di α corrispondenti ai raggi vettori $-\psi'$, $-\psi''$ daranno per A due valori, la cui differenza sarà l' angolo compreso dai raggi vettori medesimi, e però quello indicante l' intera rotazione dell' arco stesso.

Egli è facile a vedersi, che quest' ultimo angolo non dovrà oltrepassare un certo limite, affinchè possano aver luogo contemporaneamente i movimenti della curva a cui si avvolge la fune, e quello del manubrio: io non mi fermo a determinare questo limite, perchè rarissimi saranno i casi in cui si avrà bisogno di esso.

La lunghezza della fune dovendo essere eguale ad n più la porzione della curva che ha un termine in A e l' altro nel punto a cui corrisponde il raggio vettore ψ', sarà essa eguale ad S cioè, pel paragrafo quindicesimo, a

$$\sqrt{[(\psi' + \mathrm{R})^2 - r^2]} \text{ ovvero } a\sqrt{(\psi'^2 + 2\,\mathrm{R}\,\psi' + n^2)},$$

espressione semplicissima ed anche facilmente costruibile nel modo seguente.

Si faccia AM (Fig. 9) eguale a ψ', trovisi il punto P di mezzo della ML, e si descriva l' arco circolare V col raggio eguale alla PL e centro in P, e che sega il quadrante DV.., sarà VM evidentemente la lunghezza necessaria della fune: questa regola è anche un' immediata conseguenza della singolare proprietà dimostrata al paragrafo ventesimo.

Fatta Am eguale a ψ'' e descritto l' arco circolare v facendo centro nel punto t di mezzo della mL e col raggio eguale alla metà della stessa mP, si congiunga il raggio Lv; e sarà vLV l' angolo che si potrà far descrivere dal manubrio, mediante l' arco ai cui termini corrispondono i raggi vettori in lunghezza eguali a ψ', ψ''.

Essendo sen. VML $= \frac{r}{\psi'+R} = \frac{r}{ML}$, sen. vmL $= \frac{r}{mL}$, e

$$\cos. VML = \frac{MV}{ML}, \qquad \cos. vm L = \frac{mv}{mL}, \text{ e}$$

$$\text{sen}.VLv = \text{sen}.(vmL - VML) = \text{sen}.vmL\cos.VML - \cos.vmL\,\text{sen}.VML,$$

sarà

$$\text{sen}.\,VLv = \frac{r.MV}{mL.ML} - \frac{r.mv}{ML.mL}, \text{ ossia sen}.\,VLv = \frac{LD(MV-mv)}{mL.ML}$$

equazione colla quale agevolmente si otterrà l'angolo descritto dal manubrio VL.

E S E M P I O.

Sia $R = 5$, $r = 3$, $\psi' = 5$, $\psi'' = 1$; e si avrà $n = 4$

$$R + \frac{r}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) = 5 + \frac{3}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right),$$

$$\frac{r}{n}\log.\frac{(R+r+n)a+R+r-n}{(R+r-n)a+R+r+n} = \frac{3}{4}\log.\frac{2a+1}{a+3},$$

$$-\frac{1}{r}\left[\psi' + R + \sqrt{(\psi'^2 + 2R\psi' + n^2)}\right] = -6,51, \text{ e}$$

$$-\frac{1}{r}\left[\psi'' + R + \sqrt{(\psi''^2 + 2R\psi'' + n^2)}\right] = -3,73;$$

e però le equazioni della spirale a cui appartiene l' arco in quistione saranno

$$\psi = 5 + \frac{3}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right),\ \xi = \frac{3}{4}\ \log.\ \frac{3\alpha+1}{\alpha+3}\ ;$$

e le coordinate corrispondenti all' arco medesimo si otterranno, ponendo in queste equazioni in luogo di α i numeri maggiori di — 6, 51 e minori di — 3, 73.

In questo medesimo caso si ha A ossia

$$\frac{r}{n}\ \log.\ \frac{r\alpha+R-n}{r\alpha+R+n} = \frac{3}{4}\ \log.\ \frac{1}{3}\ \frac{3\alpha+1}{\alpha+3}\ ,$$

e però i valori di A corrispondenti ai due suddetti di α saranno, uno 24° 20′ e l'altro 61° 31′ i quali differiscono di 37° 10′. Adunque l'angolo compreso dai raggi vettori ψ', ψ'' o sia l'angolo esprimente la rotazione totale dell' arco di cui parlasi attorno del punto A sarà di 37° 10′.

Sostituendo nell' espressione $\surd(\psi'^2 + 2R\,\psi' + n^2)$ in vece di ψ', R′, n i rispettivi valori loro, si ha la lunghezza essenziale della fune cioè MV eguale a $\surd 91$, e però prossimamente a 9, 54.

Così essendo LD = 3, LM = ψ' + R = 10, Lm ψ'' + R = 6, ed $mv = \surd(\psi''^2 + 2R\,\psi'' + n^2) = \surd\ 27$, o prosimamente a 5, 20, dall' equazione sen. VLv = $\frac{LD(MV-mv)}{LM.Lm}$ si ha sen. VLv = 0, 217; quindi ogni passo del manubrio cioè l' angolo VLv sarà in questo caso circa 12°, 32′.

25.

Se l' angolo compreso dal manubrio e dalla fune in vece di esser retto sarà qualunque, ma si manterrà anch' esso costante durante la rotazione, mediante alcuni ragionamenti simili a quelli fatti al paragrafo secondo, si dimostra che la curva alla quale si avvolge la fune è l'evoluta di una linea MIS (Fig. 1.) dai cui punti condotte le rette MN . . , IL . . , ec. che facciano colle normali MP, ID, ec. gli angoli NMP, LID. ec.

eguali a quello compreso dal manubrio e dalla fune, e segate di esse rette le parti MN, IL, ec. eguali alla lunghezza del manubrio, si dimostra, dico, che i punti N, L, ec. debbono essere nella periferia circolare avente il raggio eguale ad R ed il centro nel punto A attorno al quale rota la curva a cui avvolgesi la fune. Appoggiandosi a questa proprietà facilmente si determineranno così l'equazione della curva MIS che quella della sua evoluta, ossia della curva alla quale è fissato l' altro capo della fune ed a cui si avvolge la fune medesima.

Sia TMS (Fig. 10.) l' evolvente nell' attuale ipotesi; ed Mm, Mt sieno la normale e la tangente ad essa in M.

Fatto l' angolo NMm eguale a quello compreso dalla fune e dal manubrio, e la retta MN eguale alla lunghezza del manubrio stesso, il punto N così determinato sarà nella periferia circolare QNL avente il raggio eguale ad R ed il centro nel punto A, intorno al quale deve rotare la curva dimandata.

Si riferisca tanto la curva TMS quanto la sua evoluta o curva dimandata agli assi rettangolari Ax, Ay, si tirino le rette MV, MP, NR come nella figura seconda; e si ritengano tutte le denominazioni fatte rispettivamente alle due curve considerate nella stessa figura seconda; più si nomini m l'angolo NMt compreso fra la NM e la Mt toccante in M la curva TMS.

Essendo $\cos.\ \mathrm{NMV} = \cos.\ (m + t\mathrm{MV}) = \frac{\cos.m - y'\mathrm{sen}.m}{s'}$

$\mathrm{sen}.\ \mathrm{NMV} = \mathrm{sen}.\ (m + t\mathrm{MV}) = \frac{\mathrm{sen}.m + y'\cos.m}{s'}$, ed

$\mathrm{AR} = \mathrm{AP} + \mathrm{MN}\cos.\ \mathrm{NMV}$, $\mathrm{RN} = \mathrm{PM} + \mathrm{MN}\ \mathrm{sen}.\ \mathrm{NMV}$,
si avrà

$\mathrm{AR} = x + \frac{r}{s'}(\cos.m - y'\mathrm{sen}.m)$, $\mathrm{RN} = y + \frac{r}{s'}(\mathrm{sen}.m + y'\cos.m)$:

Ma dev'essere $\overline{\mathrm{AR}}^2 + \overline{\mathrm{RN}}^2 = \overline{\mathrm{AN}}^2$ ossia ad R^2: adunque l'equazione della evolvente sarà

$[x + \frac{r}{s'}(\cos.m - y'\mathrm{sen}.m)]^2 + [y + \frac{r}{s'}(\mathrm{sen}.m + y'\cos.m)]^2 = \mathrm{R}^2$, ovvero

$$x^2+y^2+\frac{2r}{s'}[(x+yy')\cos.m+(y-xy')\,\text{sen}.m]=n^2.$$

Quest' equazione, postovi $x=\varphi$ sen. ω, ed $y=\varphi$ cos. ω, si trasforma in

$$\varphi^2+\frac{2r\varphi}{s'}(\varphi\cos.m+\varphi\,\omega'\,\text{sen}.m)=n^2,$$

che è l' equazione fra le coordinate polari della stessa evolvente.

Ora per avere l'equazione della curva dimandata fa d' uopo eliminare le quantità x, y, y', y'' dalle tre equazioni

$$x^2y^2+\frac{2r}{s'}[(x+yy')\cos.m+(y-xy')\,\text{sen}.m]=n^2,$$

$$t=x-y'\frac{s'^2}{y''},\ u=y+\frac{s'^2}{y''}.$$

Farò questa eliminazione, seguendo l'ordine medesimo, che ho seguito al paragrafo sesto onde eseguire la consimile operazione.

Dalla prima di queste equazioni si deduce
$(x+yy'+rs'\cos.m)s'^3=r[(x+yy')\,\text{sen}.m+(xy'-y)\cos.m]y''$;
e ponendo in questa e nella seconda in vece di y'' il suo valore cavato dalla terza, si traggono due equazioni col mezzo delle quali e della stessa prima, eliminando altresì la x, si ottengono le due

$$y=u-\frac{r}{s'}\,\text{sen}.m+\frac{r}{s'}\left(\frac{u-ty'}{t+uy'}\right)\cos.m,$$

$$[t+y'(u-y)]^2+y^2+\frac{2r}{s'}[(t+uy')\cos.m+(ys'^2-ty'-uy'^2)\,\text{sen}.m]=n^2.$$

Sostituendo nella seconda di queste ultime equazioni in luogo dell' y il suo valore desunto dalla prima, e nella risultante cambiando l'y' nel suo valore $-\frac{t'}{u'}$, si ha la seguente

$$t^2+u^2+2r\varpi'\left(\frac{t^2+u^2}{tu'-ut'}\right)\cos.m+r^2\left(\frac{tt'+uu'}{tu'-ut'}\right)^2\cos.^2m=\text{R}^2-r^2\cos.^2m,$$

che è l' equazione fra le coordinate rettangole t ed u della curva dimandata.

Da questa per ultimo, ponendovi $t=\psi$ sen. ξ, ed $u=\psi$ cos. ξ, si dedurrà

$$\psi^2 - 2r \frac{\varpi'}{\xi'} \cos. m + r^2 \frac{\psi'^2}{\psi^2 \xi'^2} \cos.^2 m = R^2 - r^2 \cos.^2 m,$$

la quale equivale alla

$$\left(\psi - r \frac{\varpi'}{\psi \xi'} \cos. m \right)^2 - R^2 = 0$$

per essere $\psi'^2 = \varpi'^2 - \psi^2 \xi'^2$.

Quindi la curva dimandata sarà rappresentata dalle equazioni seguenti

$$\psi - r \frac{\varpi'}{\psi \xi'} \cos. m - R = 0,$$

$$\psi - r \frac{\varpi'}{\psi \xi'} \cos. m + R = 0:$$

anzi dalla sola prima di queste, se si ammette ciò che si è ammesso al paragrafo nono.

Paragonando fra loro le equazioni

$$\psi - r \frac{\varpi'}{\psi \xi'} \cos. m - R = 0, \quad \psi - r \frac{\varpi'}{\psi \xi'} - R = 0,$$

è facile il comprendere, che tutto ciò che si è detto e desunto rispetto alla seconda, può estendersi anche alla prima, purchè si cambi la r in $r \cos. m$.

26.

Se dal punto intorno al quale rota il manubrio, si tirerà la perpendicolare al prolungamento della fune, si costituirà un triangolo rettangolo invariabile per tutto il tempo in cui dura la rotazione, avendo esso per ipotenusa il manubrio e per uno degli angoli acuti l'm suddetto; e però la fune applicata al manubrio e facente con esso l'angolo eguale ad un retto più m, si potrà supporre applicata perpendicolarmente alla perpendicolare medesima. Quindi tutto ciò che si è detto dal paragrafo secondo sino al vigesimoquarto, si estenderà al caso di cui si tratta; purchè si ponga in vece di r la lunghezza della stessa perpendicolare cioè il prodotto $r \cos. m$: appunto come si è trovato altrimenti alla fine del paragrafo antecedente.

Fig. 2.
Fig. 10.
Fig. 5.
Fig. 4.
Fig. 8.

Memoria Cossali pag.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig 3
Fig. 1.
Fig 2.
Fig 10.
Fig. 3.
Fig 5.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig 8.
Fig. 7.
Fig 9